

## Exercice 1 : Opérations sur les vecteurs

On donne les trois vecteurs  $\vec{V}_1(1, 1, 0)$ ,  $\vec{V}_2(0, 1, 0)$  et  $\vec{V}_3(0, 0, 2)$ .

1. Calculer les normes  $\|\vec{V}_1\|$ ,  $\|\vec{V}_2\|$  et  $\|\vec{V}_3\|$ . En déduire les vecteurs unitaires  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  et  $\vec{v}_3$  des directions respectivement de  $\vec{V}_1$ ,  $\vec{V}_2$  et de  $\vec{V}_3$ .
2. Calculer  $\cos(\widehat{\vec{v}_1, \vec{v}_2})$ , sachant que l'angle correspondant est compris entre 0 et  $\pi$ .
3. Calculer  $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$ ,  $\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3$  et  $\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3)$ . Que représente chacune de ces trois grandeurs ?

## Exercice 2 : Différentielle et dérivée d'un vecteur unitaire

Considérons la position d'un point  $M$  dans le repère  $\mathcal{R}(O, xyz)$ . Soient  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ,  $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$  et  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$  respectivement les bases cartésienne, cylindrique et sphérique associées à ce repère.

1. Calculer

$$\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \varphi}, \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{k}}{\partial \varphi}.$$

2. En déduire  $d\vec{e}_\rho$  et  $d\vec{e}_\varphi$  dans la base cartésienne.
3. Montrer que les différentielles des vecteurs de la base cylindrique peuvent se mettre sous la forme

$$d\vec{e}_\rho = dt\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\rho \quad \text{et} \quad d\vec{e}_\varphi = dt\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\varphi$$

en précisant l'expression du vecteur rotation  $\vec{\Omega}$  des vecteurs de la base cylindrique par rapport à  $\mathcal{R}$ . Déduire les dérivées par rapport au temps des vecteurs de la base cylindrique dans  $\mathcal{R}$ .

4. Quel est le vecteur rotation de la base sphérique par rapport à  $\mathcal{R}$ ? En utilisant les résultats de la question précédente, déduire les expressions de

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt}, \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}.$$

*Pour les exercices 3,4 et 5, calculer les expressions littérales des grandeurs demandées et faire l'application numérique.*

### Exercice 3 : Mouvement rectiligne

On effectue un test d'accélération sur une voiture arrêtée au départ (vitesse initiale  $v_0 = 0$ ). La route est rectiligne.

1. La voiture est chronométrée à 20s au bout d'une distance  $D = 140\text{m}$ .  
**1-a)** Déterminer l'expression de l'accélération  $\gamma$ , supposée constante.  
**1-b)** Déterminer l'expression de la vitesse  $v_D$  atteinte à la distance  $D$ .
2. Calculer la distance d'arrêt  $L$  pour une décélération de  $8\text{ms}^{-2}$ ?

### Exercice 4 : Excès de vitesse

Un conducteur roule à une vitesse constante  $v_0 = 120 \text{ km h}^{-1}$  sur une route rectiligne dépassant la limite autorisée. Un gendarme à moto démarre à l'instant où la voiture passe à sa hauteur et accélère uniformément. Le gendarme atteint la vitesse  $100 \text{ km h}^{-1}$  au bout de 12s.

1. Quel sera le temps nécessaire au gendarme pour rattraper la voiture?
2. Quelle distance aura-t-il parcourue?
3. Quelle vitesse aura-t-il atteinte?

### Exercice 5 : Mouvement circulaire uniforme

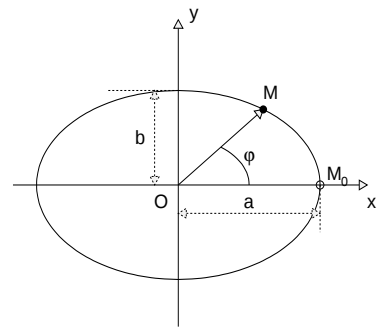
Considérons un satellite géostationnaire en mouvement circulaire uniforme autour de la Terre sur une orbite de rayon  $r$ . Il est soumis à

une accélération  $\gamma = g_0 \left(\frac{R}{r}\right)^2$ , où  $g_0 = 9.81 \text{ m s}^{-2}$  et  $R = 6400 \text{ km}$ , le rayon de la Terre. La période de révolution du satellite est égale à la période de rotation de la Terre sur elle même.

1. Calculer la période  $T$  de rotation de la Terre en secondes. En déduire la vitesse angulaire  $\Omega$ .
2. Déterminer l'altitude de l'orbite géostationnaire.

## Exercice 6 : Mouvement sur une ellipse

Un point matériel  $M$  se déplace sur une ellipse d'équation en coordonnées cartésiennes  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , voir figure ci-contre. la direction de  $\overrightarrow{OM}$  par rapport à l'axe  $Ox$  est repérée par l'angle  $\varphi$ . L'équation horaire du mouvement de  $M$  peut se mettre sous la forme  $x(t) = x_0 \cos(\omega t + \phi)$  et  $y(t) = y_0 \sin(\omega t + \psi)$  où l'on suppose que  $\omega$  est une constante. A l'instant  $t = 0$ ,  $M$  se trouvait en  $M_0$ .



1. Déterminer  $x_0$ ,  $\phi$  et  $\psi$ . En déduire  $y_0$ .
2. Déterminer les composantes, et ce dans la base cartésienne, de la vitesse  $(\dot{x}, \dot{y})$  et de l'accélération  $(\ddot{x}, \ddot{y})$ .
3. Montrer que l'accélération peut se mettre sous la forme  $\vec{\gamma} = -k\overrightarrow{OM}$  où  $k$  est à déterminer.

## Corrigé 1 : Opérations sur les vecteurs

On donne les trois vecteurs  $\vec{V}_1(1, 1, 0)$ ,  $\vec{V}_2(0, 1, 0)$  et  $\vec{V}_3(0, 0, 2)$ . Notons par  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  la base dans laquelle les différents vecteurs sont décomposés.

1. Calculons les normes des différents vecteurs et les vecteurs unitaires de leurs directions respectives

$$\|\vec{V}_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2} \implies \vec{v}_1 = \frac{\vec{V}_1}{\|\vec{V}_1\|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

$$\|\vec{V}_2\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = 1 \implies \vec{v}_2 = \frac{\vec{V}_2}{\|\vec{V}_2\|} = (0, 1, 0)$$

$$\|\vec{V}_3\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2 \implies \vec{v}_3 = \frac{\vec{V}_3}{\|\vec{V}_3\|} = (0, 0, 1)$$

2. On calcule  $\cos(\widehat{\vec{v}_1, \vec{v}_2})$  comme suit

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \|\vec{v}_1\| \|\vec{v}_2\| \cos(\widehat{\vec{v}_1, \vec{v}_2}) = \cos(\widehat{\vec{v}_1, \vec{v}_2}) \\ \implies \cos(\widehat{\vec{v}_1, \vec{v}_2}) &= \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

3. Nous avons

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3 &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \times \vec{e}_1 + 0 \times \vec{e}_2 - 0 \times \vec{e}_3 = (1, 0, 0) \\ \vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3) &= 1 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 0 = 1. \end{aligned}$$

Le premier terme représente le produit scalaire entre les vecteurs  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$ , il est égal au produit du module de la projection de  $\vec{v}_1$  sur  $\vec{v}_2$  multiplié par le module de  $\vec{v}_2$ . Le deuxième terme est le produit vectoriel entre  $\vec{v}_2$  et  $\vec{v}_3$ . Le dernier terme est le produit mixte entre  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$  et qui n'est d'autre que le volume du parallélépipède construit sur la base des trois vecteurs.

## Corrigé 2 : Différentielle et dérivée d'un vecteur unitaire

Considérons la position d'un point  $M$  dans le repère  $\mathcal{R}(O, xyz)$ . Soient  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ,  $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$  et  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$  respectivement les bases cartésienne, cylindrique et sphérique associées à ce repère.

1. Exprimons d'abord les vecteurs de la base cylindrique dans la base cartésienne :

$$\begin{aligned}\vec{e}_\rho &= \cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j} \\ \vec{e}_\varphi &= -\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j} \\ \vec{k} &= \vec{k}.\end{aligned}$$

Sachant que la base cartésienne est une base fixe, alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \varphi} &= -\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j} = \vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} &= -\cos\varphi\vec{i} - \sin\varphi\vec{j} = -\vec{e}_\rho \\ \frac{\partial \vec{k}}{\partial \varphi} &= \vec{0}.\end{aligned}$$

2. Sachant que  $\vec{e}_\rho$  et  $\vec{e}_\varphi$  ne dépendent que de  $\varphi$ , leurs différentielles sont données

$$\begin{aligned}d\vec{e}_\rho &= \frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \varphi}d\varphi = d\varphi\vec{e}_\varphi \\ d\vec{e}_\varphi &= \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi}d\varphi = -d\varphi\vec{e}_\rho.\end{aligned}$$

3. Comme la base  $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$  est une base directe alors  $\vec{e}_\varphi = \vec{k} \wedge \vec{e}_\rho$  et  $\vec{e}_\rho = \vec{e}_\varphi \wedge \vec{k}$ .  
En utilisant ces deux résultats, nous obtenons

$$d\vec{e}_\rho = d\varphi\vec{e}_\varphi = dt\frac{d\varphi}{dt}\vec{k} \wedge \vec{e}_\rho = dt\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\rho$$

avec  $\vec{\Omega} = \dot{\varphi}\vec{k}$ . De même, on peut écrire

$$d\vec{e}_\varphi = -d\varphi\vec{e}_\rho = dt\frac{d\varphi}{dt}\vec{k} \wedge \vec{e}_\varphi = dt\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\varphi.$$

D'où les résultats recherchés.

Ce qui donne les dérivées par rapport au temps de  $\vec{e}_\rho$  et de  $\vec{e}_\varphi$

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} &= \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\rho \\ \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} &= \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\varphi.\end{aligned}$$

**Pour dériver par rapport au temps dans un repère  $\mathcal{R}$  un vecteur unitaire, il suffit de connaître son vecteur rotation dans  $\mathcal{R}$  et utiliser le résultat précédent.**

4. Pour déterminer le vecteur rotation d'une base, la méthode directe est celle utilisée dans l'exercice précédent. Il suffit de prendre un vecteur de la base<sup>1</sup> et de mettre sa dérivée sous la forme qui met en évidence le vecteur rotation. Une deuxième approche qualitative consiste à procéder comme suit

- i- repérer chaque angle qui décrit la rotation<sup>2</sup> du vecteur considéré : dans le cas précédent c'est  $\varphi$  ;
- ii- repérer le plan dans lequel chaque rotation a lieu et le vecteur rotation qui lui est associé est porté par le vecteur unitaire perpendiculaire au plan en appliquant la règle du tire-bouchon : dans le cas précédent c'est  $\vec{k}$  ;
- iii- le vecteur rotation est alors la somme de tous les vecteurs décrivant chacune des rotations : dans le cas précédent, il s'agit d'une seule et le vecteur rotation est  $\vec{\Omega} = \dot{\varphi}\vec{k}$ .

Notons que le module du vecteur rotation associé à un angle est donné par la vitesse angulaire associée à cet angle. Aussi, dans le cas de la base sphérique, on prend  $\vec{e}_r$  et sa rotation est repérée par les angles

- i  $\varphi$  : rotation dans le sens trigonométrique dans le plan perpendiculaire à  $\vec{k} \implies \vec{\Omega}_1 = \dot{\varphi}\vec{k}$  ;
- ii  $\theta$  : rotation dans le sens trigonométrique dans le plan perpendiculaire à  $\vec{e}_\varphi \implies \vec{\Omega}_2 = \dot{\theta}\vec{e}_\varphi$

et le vecteur rotation de  $\vec{e}_r$  dans  $\mathcal{R}$  est  $\vec{\Omega} = \dot{\varphi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{e}_\varphi$  et qui est par la même occasion le vecteur rotation de la base sphérique dans  $\mathcal{R}$ .

En utilisant le résultat de la question précédente, nous obtenons

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_r = (\dot{\varphi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{e}_\varphi) \wedge \vec{e}_r.$$

Or  $\vec{k} = \cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta$ , ce qui donne  $\vec{k} \wedge \vec{e}_r = (\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta) \wedge \vec{e}_r = \sin\theta\vec{e}_\varphi$  et  $\vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_r = \vec{e}_\theta$  ce qui implique

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi + \dot{\theta}\vec{e}_\theta.$$

De la même manière, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} &= \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\theta = (\dot{\varphi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{e}_\varphi) \wedge \vec{e}_\theta \\ &= \dot{\varphi}\cos\theta\vec{e}_\varphi - \dot{\theta}\vec{e}_r. \end{aligned}$$

1. un parmi ceux qui sont mobiles. Dans l'exemple précédent, on ne peut pas prendre  $\vec{k}$  car il est fixe.

2. on peut avoir le cas où plusieurs angles sont mis en jeu, c'est le cas de la base sphérique.

Nous avons utilisé  $\vec{k} \wedge \vec{e}_\theta = \cos\theta \vec{e}_\varphi$ . Et enfin,

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} &= \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\varphi = (\dot{\varphi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{e}_\varphi) \wedge \vec{e}_\varphi \\ &= \dot{\varphi}(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta) \wedge \vec{e}_\varphi = -\dot{\varphi}(\cos\theta\vec{e}_\theta + \sin\theta\vec{e}_r)\end{aligned}$$

*Pour les exercices 3,4 et 5, calculer les expressions littérales des grandeurs demandées et faire l'application numérique.*

## Corrigé 3 : Mouvement rectiligne

On effectue un test d'accélération sur une voiture arrêtée au départ (vitesse initiale  $v_0 = 0$ ). La route est rectiligne.

Soit  $\mathcal{R}(Oxyz)$  un référentiel tel que la route est confondue avec l'axe  $Ox$ . Aussi la position de la voiture à un instant donné est repérée par  $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$ . On considère qu'à l'instant initial  $t = 0$ , la voiture se trouve en  $O$  et donc  $x_0 = 0$ . Notons aussi que la vitesse initiale est nulle  $v_0 = 0$ .

1. La voiture est chronométrée à 20s au bout d'une distance  $D = 140\text{m}$ . Notons par  $x_D = D = 140\text{ m}$  et  $t_D = 20\text{s}$ .

**1-a)** Comme  $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} \implies \vec{\gamma} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \ddot{x}\vec{i} = \gamma\vec{i}$ . En intégrant, sachant que l'accélération est constante,

$$\ddot{x} = \gamma \implies \dot{x} = v = \gamma t + v_0 = \gamma t \implies x = \frac{1}{2}\gamma t^2 + x_0 = \frac{1}{2}\gamma t^2.$$

Nous avons utilisé  $v_0 = 0$  et  $x_0 = 0$ . Ainsi l'accélération est donnée par

$$\gamma = \frac{2x_D}{t_D^2}.$$

**A.N. :**  $x_D = 140\text{ m}$  et  $t_D = 20\text{ s} \implies \gamma = \frac{2 \times 140}{20^2} = 14\text{ms}^{-2}$ .

**1-b)** L'expression de la vitesse est donnée par

$$v = \gamma t \implies v_D = \gamma \times t_D.$$

**A.N. :**  $v_D = 14 \times 20 = 280\text{ms}^{-1}$ .

2. La voiture décélère à partir de  $x = x_D$  et l'accélération est  $\gamma' = -8\text{ms}^{-2}$ . Changeons d'origine et prenons cette position et cet instant comme origines respectivement de  $x$  et de  $t$ . Alors, nous avons

$$\ddot{x} = \gamma' \implies \dot{x} = v = \gamma' t + v_D \implies x = \frac{1}{2}\gamma' t^2 + v_D t.$$

La voiture s'arrête au bout d'un temps  $t_a$ , c'est à dire  $v(t = t_a) = 0 \implies t_a = -v_D/\gamma'$ . Rappelons que  $\gamma' < 0$ . Ainsi la distance d'arrêt  $L$  est donnée par

$$L = x(t = t_a) = \frac{1}{2}\gamma' t_a^2 + v_D t_a = \frac{1}{2}\gamma' \frac{v_D^2}{\gamma'^2} - \frac{v_D^2}{\gamma'} = -\frac{1}{2} \frac{v_D^2}{\gamma'}.$$

**A.N. :**  $L = \frac{1}{2} \times \frac{280^2}{8} = 2025\text{ m}$ .

## Corrigé 4 : Excès de vitesse

Un conducteur roule à une vitesse constante  $v_0 = 120 \text{ km h}^{-1}$  sur une route rectiligne dépassant la limite autorisée. Un gendarme à moto démarre à l'instant où la voiture passe à sa hauteur et accélère uniformément. Le gendarme atteint la vitesse  $100 \text{ km h}^{-1}$  au bout de  $12 \text{ s}$ .

Soit  $\mathcal{R}(Oxyz)$  un référentiel et on prend la route parallèle à l'axe  $Ox$ . A l'instant  $t = 0$ , où la voiture passe, le gendarme est en  $O$ . La position de la voiture est repérée par  $x_V = v_0 t$ , puisque la voiture roule à la vitesse constante  $v_0$ .

1. Etablissons les équations de mouvement de la moto, repérée par  $x_m$ , et la voiture repérée par  $x_V$ .

La moto accélère uniformément, ce qui implique que  $\gamma_m = \text{constante}$ . La moto démarre, ce qui implique que  $v_{0m} = 0$ . Aussi,

$$\ddot{x}_m = \gamma_m \implies v_m = \dot{x}_m = \gamma_m t + v_{0m} = \gamma t \implies x_m = \frac{1}{2} \gamma_m t^2 + x_{0m} = \frac{1}{2} \gamma_m t^2.$$

Quant à la voiture, comme son mouvement est uniforme, la vitesse est constante, alors la position de la voiture à l'instant  $t$  est  $x_V = v_0 t + x_{0V} = v_0 t$ . Le temps  $t_r$  nécessaire au gendarme pour rattraper la voiture est le temps au bout duquel  $x_m(t = t_r) = x_V(t = t_r)$  ce qui implique

$$\frac{1}{2} \gamma_m t_r^2 = v_0 t_r \implies t_r = \frac{2v_0}{\gamma_m}.$$

Or la moto atteint la vitesse  $v_1 = 100 \text{ km h}^{-1}$  au bout de  $t_1 = 12 \text{ s}$ . Comme  $v_m = \gamma_m t \implies \gamma_m = v_1/t_1$ . Ainsi

$$t_r = \frac{2v_0 t_1}{v_1}.$$

**A.N. :**  $v_0/v_1 = 1.2$  et  $t_r = 2 \times 12 \times 1.2 = 28.8 \text{ s}$ .

2. La distance  $L$  parcourue par le gendarme à  $t_r$  est alors égale à

$$L = \frac{1}{2} \gamma_m t_r^2 = \frac{1}{2} \frac{v_1}{t_1} \frac{4 \times v_0^2 t_1^2}{v_1^2} = 2 \frac{v_0^2}{v_1} t_1.$$

**A.N. :**  $t_1 = 12/3600 = 0.00333 \text{ h}$ , et  $L = 2 \times 1.2 \times 100 \times 0.00333 = 0.8 \text{ km}$ .

3. La vitesse atteinte par la moto est

$$v_r = \gamma_m t_r = \frac{v_1}{t_1} \frac{2v_0 t_1}{v_1} = 2v_0.$$

**A.N. :**  $v_r = 2 \times 100 = 200 \text{ km h}^{-1}$ .



## Corrigé 5 : Mouvement circulaire uniforme

Considérons un satellite géostationnaire en mouvement circulaire uniforme autour de la Terre sur une orbite de rayon  $r$ . Il est soumis à une accélération  $\gamma = g_0 \left(\frac{R}{r}\right)^2$ , où  $g_0 = 9.81 \text{ m s}^{-2}$  et  $R = 6400 \text{ km}$ , le rayon de la Terre. La période de révolution du satellite est égale à la période de rotation de la Terre sur elle-même.

Soit  $\mathcal{R}(O, xyz)$  le référentiel lié au centre de la terre. Comme le mouvement est circulaire, nous utilisons les coordonnées polaires pour décrire le mouvement du satellite que l'on note par  $M$ .

1. La période  $T$  de rotation de la Terre est égale à

$$T = 24 \times 3600 = 86400 \text{ s}.$$

Comme la vitesse angulaire  $\Omega$  est reliée à la période  $T$  par  $\Omega = 2\pi/T$ , nous avons

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} = 7.27 \cdot 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}.$$

2. Pour déterminer l'altitude de l'orbite géostationnaire, calculons d'abord son rayon  $r$ . Pour ce faire, calculons l'accélération du satellite.

Le vecteur position est  $\vec{OM} = \rho \vec{e}_\rho \implies \vec{V}(M/\mathcal{R}) = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$ . L'accélération est ainsi donnée par

$$\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi}) \vec{e}_\varphi.$$

Comme le mouvement est circulaire alors  $\rho = r = \text{Constante} \implies \dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$ . Le mouvement est aussi uniforme alors le module de la vitesse est constant, ce qui implique que  $V(M/\mathcal{R}) = r\dot{\varphi} = \text{Constante} \implies \dot{\varphi} = \text{Constante}$ , résultat que l'on connaît déjà puisque  $\dot{\varphi} = \Omega$ . D'où l'expression de l'accélération se réduit à

$$\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = -r\dot{\varphi}^2 \vec{e}_\rho \implies \gamma = r\dot{\varphi}^2 = g_0 \left(\frac{R}{r}\right)^2$$

on en déduit que le rayon de l'orbite est donné par

$$r^3 = g_0 \left(\frac{R}{\Omega}\right)^2 \implies r = g_0^{1/3} \left(\frac{R}{\Omega}\right)^{2/3}.$$

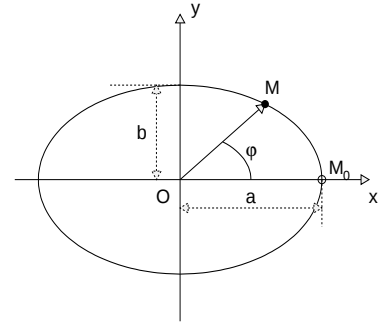
L'altitude de l'orbite  $h$  est ainsi donnée par

$$h = r - R = g_0^{1/3} \left(\frac{R}{\Omega}\right)^{2/3} - R.$$

**A.N. :**  $r = 42200 \text{ km}$  et  $h = r - R = 36000 \text{ km}$ .

## Corrigé 6 : Mouvement sur une ellipse

Un point matériel  $M$  se déplace sur une ellipse d'équation en coordonnées cartésiennes  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , voir figure ci-contre. la direction de  $\overrightarrow{OM}$  par rapport à l'axe  $Ox$  est repérée par l'angle  $\varphi$ . L'équation horaire du mouvement de  $M$  peut se mettre sous la forme  $x(t) = x_0 \cos(\omega t + \phi)$  et  $y(t) = y_0 \sin(\omega t + \psi)$  où l'on suppose que  $\omega$  est une constante. A l'instant  $t = 0$ ,  $M$  se trouvait en  $M_0$ .



1. A l'instant initial  $t = 0$ , le point matériel  $M$  se trouvait en  $M_0$ , ce qui implique que  $x(t = 0) = a$  avec  $\phi(t = 0) = 0$  et  $y(t = 0) = 0 = y_0 \sin \psi$ . Ainsi, nous avons  $x_0 = a$  et  $\psi = 0$ .

Pour déduire  $y_0$ , il suffit de se rappeler que  $x_0$  et  $y_0$  vérifient l'équation de l'ellipse, ce qui donne

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \implies \cos^2 \omega t + \frac{y_0^2}{b^2} \sin^2 \omega t = 1.$$

Or cette dernière équation n'est vérifiée  $\forall t$  que si  $y_0 = b$ . On en conclut que  $x(t) = a \cos \omega t$  et  $y(t) = b \sin \omega t$ .

2. Pour obtenir les composantes de la vitesse et de l'accélération, il suffit de dériver  $x(t)$  et  $y(t)$  en tenant compte que  $\omega$  est constante :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -a\omega \sin \omega t \text{ et } \dot{y} = b\omega \cos \omega t \\ \ddot{x} &= -a\omega^2 \cos \omega t \text{ et } \ddot{y} = -b\omega^2 \sin \omega t \end{aligned}$$

ce qui donne pour les composantes cartésiennes de la vitesse  $(-a\omega \sin \omega t, b\omega \cos \omega t)$  et celles de l'accélération  $(-a\omega^2 \cos \omega t, -b\omega^2 \sin \omega t)$ .

3. Partant des composantes de l'accélération

$$\vec{\gamma} = -\omega^2 (a \cos \omega t, b \sin \omega t) = -\omega^2 \overrightarrow{OM}$$

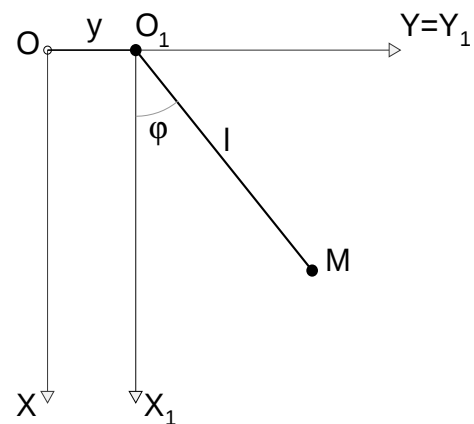
ce qui implique que  $k = \omega^2$ .

## Exercice 1 : Flocons de neige

Le passager d'une voiture observe que la neige tombe en formant un angle de  $80^\circ$  par rapport à la verticale lorsque celui-ci roule à une vitesse de  $110 \text{ km h}^{-1}$ . Lorsque la voiture s'arrête au feu rouge, le passager regarde la neige tomber et constate que celle-ci tombe verticalement. Calculer la vitesse de la neige par rapport au sol puis par rapport à la voiture qui roule à  $110 \text{ km h}^{-1}$ .

## Exercice 2 : Pendule en mouvement

On considère un point matériel  $M$  suspendu à un fil inextensible de longueur  $l$ . Le point de suspension  $O_1$  du pendule ainsi formé est en mouvement dans le référentiel  $\mathcal{R}(O, XYZ)$  le long de l'axe  $OY$ . La position de  $O_1$  est repérée par  $y$ . Le mouvement de  $M$  a lieu dans le plan  $OXY$ , voir figure ci-contre. Soit  $\mathcal{R}_1(O_1, X_1Y_1Z_1)$  le référentiel d'origine  $O_1$  et dont les axes restent constamment parallèles à ceux de  $\mathcal{R}$ .



**Les expressions finales des grandeurs vectorielles doivent être établies dans la base cartésienne  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  associée à  $\mathcal{R}$ .**

1. Calculer la vitesse et l'accélération de  $M$  dans  $\mathcal{R}_1$ .
2. Calculer la vitesse d'entraînement, l'accélération d'entraînement et l'accélération de Coriolis en  $M$  du mouvement de  $\mathcal{R}_1$  par rapport  $\mathcal{R}$ .
3. En déduire la vitesse et l'accélération de  $M$  dans  $\mathcal{R}$ .

## Exercice 3 : Attachez vos ceintures ...

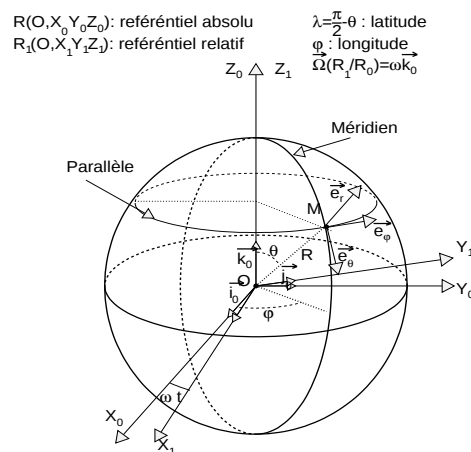
On se propose dans cet exercice d'étudier le mouvement du vol d'un avion parcourant une ligne rejoignant deux villes se trouvant sur le même méridien

On suppose que l'avion effectue le vol à une hauteur  $h$  et à une longitude  $\varphi_0$  et ce à une vitesse  $v$  constante par rapport à la surface terrestre.

Soit  $\mathcal{R}_0(OX_0Y_0Z_0)$  le repère géocentrique et  $\mathcal{R}_1(OX_1Y_1Z_1)$  le repère lié à la terre. L'avion est considéré comme un point matériel, que l'on notera  $M$ , repéré dans  $\mathcal{R}_1$  par les angles  $\theta$  et  $\varphi$ , voir figure ci-contre. Soit  $R$  le rayon du globe terrestre et  $\omega$  sa vitesse angulaire de rotation.

**Exprimer tous les résultats dans la base sphérique  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ .**

1. Etablir l'expression de la vitesse de l'avion  $\vec{V}(M/\mathcal{R}_1)$ . En déduire que  $\dot{\theta}$  est constante.
2. Etablir l'expression de l'accélération de l'avion  $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_1)$ .
3. Quel est le vecteur rotation  $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R})$  ?
4. Etablir les expressions de la vitesse  $\vec{V}(M/\mathcal{R})$  et de l'accélération  $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$ . En déduire l'effet de l'accélération de Coriolis et celui de l'accélération d'entraînement sur le mouvement de l'avion.
5. Reprendre l'exercice si l'avion se déplace selon le parallèle de latitude  $\lambda_0$ .



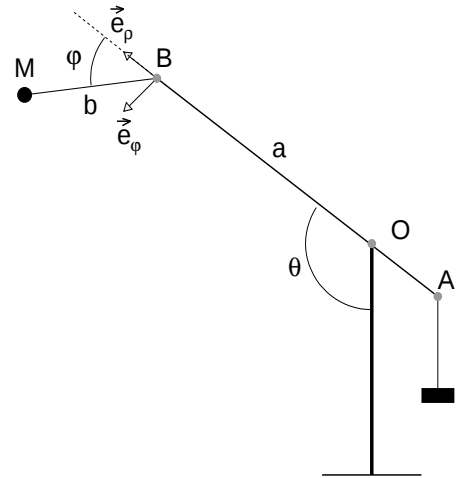
## Exercice 4 : Arme à l'ancienne

L'une des armes utilisée au Moyen-Âge pour envoyer des charges lourdes contre les murailles était ce que l'on appelle "un trébuchet" ou le catapulte. Il est composé d'une poutre  $AB$  à laquelle est fixée un contrepoids en  $A$ . En  $B$  est attachée une corde au bout de laquelle une poche contient le projectile  $M$ , voir figure ci-contre.

Soit  $\mathcal{R}(Oxyz)$  le repère lié au sol et  $\mathcal{R}_B(Ax_1y_1z_1)$  le repère lié à la poutre. Le mouvement a lieu dans le plan  $(Oxy)$ . La base polaire  $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$  est liée à  $\mathcal{R}_B$ . On donne  $OB = a$  et  $BM = b$ .

**Les grandeurs vectorielles doivent être exprimées dans la base polaire  $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$ .**

1. Quel est le mouvement de  $\mathcal{R}_B$  par rapport à  $\mathcal{R}$ ? En déduire le vecteur rotation  $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_B/\mathcal{R})$ .
2. On suppose que la corde  $BM$  reste tendue. Etablir l'expression de  $\vec{V}(M/\mathcal{R}_B)$ .
3. Déterminer le vecteur  $\overrightarrow{OM}$  et déduire la vitesse d'entraînement  $\vec{V}_e$  en  $M$ .
4. Le projectile est lâché lorsque  $\theta = \pi$  et  $\varphi = 0$  ( $AOBM$  vertical).
  - a- Déterminer la vitesse de  $M$  dans  $\mathcal{R}$ ,  $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ , en fonction de  $a, b, \dot{\varphi}$  et  $\dot{\theta}$ .
  - b- Montrer que la vitesse obtenue est plus grande que s'il n'y avait qu'un seul bras rigide de longueur  $a + b$ .



## Corrigé 1 : Flocons de neige

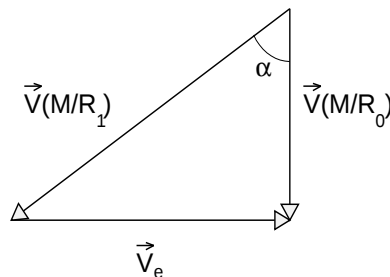
$\mathcal{R}_0$  : lié au sol  $\Rightarrow$  référentiel absolu ;

$\mathcal{R}_1$  : lié à la voiture  $\Rightarrow$  référentiel relatif dont  $\|\vec{V}_e\| = 110 \text{ km h}^{-1}$  ;

On note le flocon par  $M$ . Alors la loi de composition des vitesses, voir figure ci-contre, donne

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(M/\mathcal{R}_1) + \vec{V}_e$$

avec  $(\widehat{\vec{V}(M/\mathcal{R}_0), \vec{V}_e}) = \pi/2$  et  $(\widehat{\vec{V}(M/\mathcal{R}_1), \vec{V}(M/\mathcal{R}_0)}) = \alpha = 80^\circ$ .



— Vitesse du flocon par rapport au sol  $= \|\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)\|$

$$\text{tg} \alpha = \frac{\|\vec{V}_e\|}{\|\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)\|} \Rightarrow \|\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)\| = \frac{\|\vec{V}_e\|}{\text{tg} \alpha} = \frac{110}{\text{tg} \frac{80 \times \pi}{180}} = 19.4 \text{ km h}^{-1}$$

— Vitesse du flocon par rapport à la voiture  $= \|\vec{V}(M/\mathcal{R}_1)\|$  :

**1<sup>ère</sup> approche** : on utilise la relation de Pythagore :

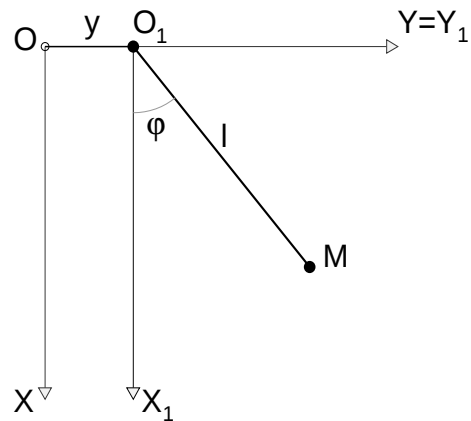
$$\begin{aligned} \|\vec{V}(M/\mathcal{R}_1)\|^2 &= \|\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)\|^2 + \|\vec{V}_e\|^2 \\ \Rightarrow \|\vec{V}(M/\mathcal{R}_1)\| &= \sqrt{\|\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)\|^2 + \|\vec{V}_e\|^2} \\ &= 111.7 \text{ km h}^{-1}. \end{aligned}$$

## 2<sup>ème</sup> approche :

$$\begin{aligned}\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{V}(M/\mathcal{R}_0) &= \vec{V}(M/\mathcal{R}_1) \cdot \vec{V}(M/\mathcal{R}_0) + \vec{V}_e \cdot \vec{V}(M/\mathcal{R}_0) \\ \Rightarrow \|\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)\|^2 &= \|\vec{V}(M/\mathcal{R}_1)\| \|\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)\| \cos \alpha \\ \Rightarrow \|\vec{V}(M/\mathcal{R}_1)\| &= \frac{\|\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)\|}{\cos \alpha} \\ &= 111.7 \text{ km h}^{-1}\end{aligned}$$

## Corrigé 2 : Pendule en mouvement

On considère un point matériel  $M$  suspendu à un fil inextensible de longueur  $l$ . Le point de suspension  $O_1$  du pendule ainsi formé est en mouvement dans le référentiel  $\mathcal{R}(O, XYZ)$  le long de l'axe  $OY$ . La position de  $O_1$  est repérée par  $y$ . Le mouvement de  $M$  a lieu dans le plan  $OXY$ , voir figure ci-contre. Soit  $\mathcal{R}_1(O_1, X_1Y_1Z_1)$  le référentiel d'origine  $O_1$  et dont les axes restent constamment parallèles à ceux de  $\mathcal{R}$ .



**Les expressions finales des grandeurs vectorielles doivent être établies dans la base cartésienne  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  associée à  $\mathcal{R}$ .**

1. La vitesse de  $M$  dans  $\mathcal{R}_1$  est donnée par

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O_1M} &= l(\cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j}) \\ \Rightarrow \vec{V}(M/\mathcal{R}_1) &= \left. \frac{d}{dt}\overrightarrow{O_1M} \right|_{\mathcal{R}_1} = l\dot{\varphi}(-\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j})\end{aligned}$$

et celle de l'accélération de  $M$  dans  $\mathcal{R}_1$  s'exprime comme suit

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_1) &= \left. \frac{d}{dt}\vec{V}(M/\mathcal{R}_1) \right|_{\mathcal{R}_1} \\ &= -l(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi)\vec{i} + l(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi)\vec{j}\end{aligned}$$

2.  $\mathcal{R}_1$  est en translation par rapport à  $\mathcal{R}$ , d'où  $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) = \vec{0}$  et la vitesse d'entraînement est donnée par

$$\vec{V}_e = \left. \frac{d}{dt}\overrightarrow{OO_1} \right|_{\mathcal{R}} = \dot{y}\vec{j}.$$

L'accélération d'entraînement est

$$\vec{\gamma}_e = \left. \frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{OO_1} \right|_{\mathcal{R}} = \ddot{y}\vec{j}$$

et celle de Coriolis est nulle puisque  $\mathcal{R}_1$  est en translation par rapport à  $\mathcal{R}$ .

3. La vitesse de  $M$  dans  $\mathcal{R}$  est donnée par

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{V}(M/\mathcal{R}_1) + \vec{V}_e = -l\dot{\varphi}\sin\varphi\vec{i} + (l\dot{\varphi}\cos\varphi + \dot{y})\vec{j}.$$

L'accélération de  $M$  dans  $\mathcal{R}$  est égale à

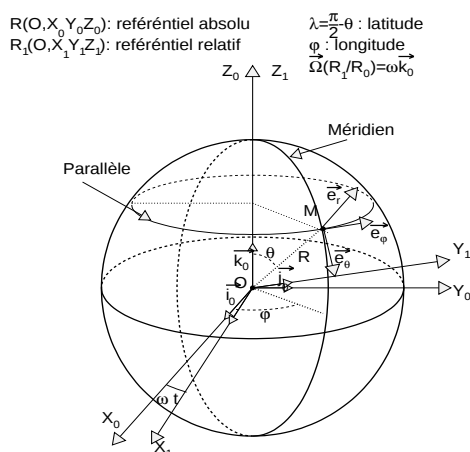
$$\begin{aligned}\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) &= \left. \frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{OO_1} \right|_{\mathcal{R}} + \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_1) \\ &= -l(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi)\vec{i} + [\ddot{y} + l(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi)]\vec{j}\end{aligned}$$

## Corrigé 3 : Attachez vos ceintures ...

On se propose dans cet exercice d'étudier le mouvement du vol d'un avion parcourant une ligne rejoignant deux villes se trouvant sur le même méridien. On suppose que l'avion effectue le vol à une hauteur  $h$  et à une longitude  $\varphi_0$  et ce à une vitesse  $v$  constante par rapport à la surface terrestre.

Soit  $\mathcal{R}_0(OX_0Y_0Z_0)$  le repère géocentrique et  $\mathcal{R}_1(OX_1Y_1Z_1)$  le repère lié à la terre. L'avion est considéré comme un point matériel, que l'on notera  $M$ , repéré dans  $\mathcal{R}_1$  par les angles  $\theta$  et  $\varphi$ , voir figure ci-contre. Soit  $R$  le rayon du globe terrestre et  $\omega$  sa vitesse angulaire de rotation.

**Exprimer tous les résultats dans la base sphérique  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ .**



On pose  $R_M = R + h$ . Nous avons  $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) = \omega\vec{k}$ .

1. Nous avons  $\overrightarrow{OM} = R_M\vec{e}_r$ , sachant que  $\varphi = \varphi_0$ , alors

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}_1) = \left. \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1} = R_M\dot{\theta}\vec{e}_\theta \implies \|\vec{V}(M/\mathcal{R}_1)\|^2 = v^2 = R_M^2\dot{\theta}^2$$

comme  $v$  est constante alors  $\dot{\theta}$  est constante.



2.

$$\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_1) = \left. \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}_1} = -R_M \dot{\theta}^2 \vec{e}_r.$$

3. Le vecteur rotation

$$\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) = \omega \vec{k}.$$

4. —  $\vec{V}(M/\mathcal{R})$  :

$$\begin{aligned} \vec{V}_e &= \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{OM} = \omega \vec{k} \wedge R_M \vec{e}_r \\ &= R_M \omega \sin \theta \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{V}(M/\mathcal{R}_1) + \vec{V}_e = R_M (\dot{\theta} \vec{e}_\theta + \omega \sin \theta \vec{e}_\varphi).$$

—  $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$  :

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}_c &= 2\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \vec{V}(M/\mathcal{R}_1) \\ &= 2\omega \dot{\theta} R_M \vec{k} \wedge \vec{e}_\theta = 2\omega \dot{\theta} \cos \theta R_M \vec{e}_\varphi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}_e &= \left. \frac{d\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R})}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OM}_1 + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge (\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{OM}) \\ &= R_M \omega^2 \vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{e}_r) \\ &= R_M \omega^2 \sin \theta (\sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta). \end{aligned}$$

On rappelle que  $\vec{e}_\rho = \sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta$ .

Ce qui donne

$$\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = R_M (\omega^2 \sin^2 \theta - \dot{\theta}^2) \vec{e}_r + R_M \omega^2 \sin \theta \cos \theta \vec{e}_\theta + 2\omega \dot{\theta} \cos \theta R_M \vec{e}_\varphi$$

L'effet de l'accélération de Coriolis est qu'elle engendre une force d'inertie qui a tendance à dévier l'avion vers l'est.

Quant à l'effet de l'accélération d'entraînement, elle introduit une force d'inertie qui a tendance à éjecter l'avion vers l'espace dans le plan du parallèle.

5. Dans ce cas de figure,  $\theta = \theta_0 = \frac{\pi}{2} - \lambda_0$ . Ce qui donne

$$\begin{aligned} \vec{V}(M/\mathcal{R}_1) &= R_M \sin \theta_0 \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \text{ et } \dot{\varphi} \text{ est Const} \\ \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_1) &= -R_M \sin \theta_0 \dot{\varphi}^2 (\sin \theta_0 \vec{e}_r + \cos \theta_0 \vec{e}_\theta). \end{aligned}$$

La vitesse et l'accélération d'entraînement restent identiques.

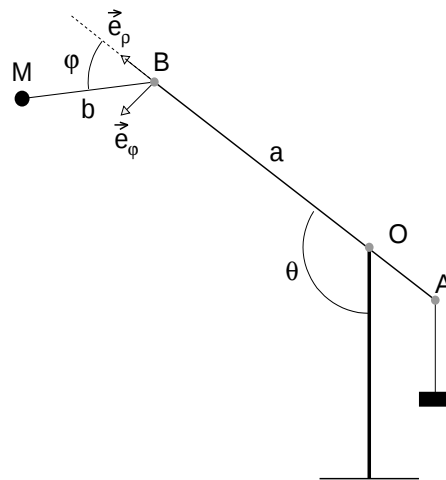
$$\vec{\gamma}_c = 2\omega \dot{\varphi} \sin \theta_0 R_M (\sin \theta_0 \vec{e}_r + \cos \theta_0 \vec{e}_\theta).$$

Les différentes expressions permettent de déduire  $\vec{V}(M/\mathcal{R})$  et  $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$ .

## Corrigé 4 : Arme à l'ancienne

L'une des armes utilisée au Moyen-Âge pour envoyer des charges lourdes contre les murailles était ce que l'on appelle "un trébuchet" ou le catapulte. Il est composé d'une poutre  $AB$  à laquelle est fixée un contrepoids en  $A$ . En  $B$  est attachée une corde au bout de laquelle une poche contient le projectile  $M$ , voir figure ci-contre. Soit  $\mathcal{R}(Oxyz)$  le repère lié au sol et  $\mathcal{R}_B(Bx_1y_1z_1)$  le repère lié à la poutre. Le mouvement a lieu dans le plan  $(Oxy)$ . La base polaire  $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$  est liée à  $\mathcal{R}_B$ . On donne  $OB = a$  et  $BM = b$ .

**Les grandeurs vectorielles doivent être exprimées dans la base polaire  $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$ .**



1.  $\mathcal{R}_B$  est en rotation par rapport à  $\mathcal{R}$  et  $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_B/\mathcal{R}) = \dot{\theta}\vec{k}$ .
- 2.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BM} &= b(\cos\varphi\vec{e}_\rho + \sin\varphi\vec{e}_\varphi) \\ \Rightarrow \vec{V}(M/\mathcal{R}_B) &= \left. \frac{d\overrightarrow{BM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_B} = b\dot{\varphi}(-\sin\varphi\vec{e}_\rho + \cos\varphi\vec{e}_\varphi).\end{aligned}$$

- 3.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM} = (a + b\cos\varphi)\vec{e}_\rho + b\sin\varphi\vec{e}_\varphi.$$

La vitesse d'entraînement en  $M$  de  $\mathcal{R}_B$  par rapport à  $\mathcal{R}$  est

$$\begin{aligned}\vec{V}_e &= \left. \frac{d\overrightarrow{OB}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_B/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{BM} \\ &= a\dot{\theta}\vec{e}_\varphi + b\dot{\theta}(-\sin\varphi\vec{e}_\rho + \cos\varphi\vec{e}_\varphi).\end{aligned}$$

4. Le projectile est lâché lorsque  $\theta = -\pi$  et  $\varphi = 0$  ( $AOBM$  vertical).

**a-**

$$\begin{aligned}\vec{V}(M/\mathcal{R})(\theta = -\pi, \varphi = 0) &= \vec{V}(M/\mathcal{R}_B)(\theta = -\pi, \varphi = 0) + \vec{V}_e(\theta = -\pi, \varphi = 0) \\ &= [b(\dot{\varphi} + \dot{\theta}) + a\dot{\theta}] \vec{e}_\varphi \\ \implies \|\vec{V}(M/\mathcal{R})(\theta = -\pi, \varphi)\| &= b(\dot{\varphi} + \dot{\theta}) + a\dot{\theta}.\end{aligned}$$

5. S'il n'y avait qu'un seul bras rigide de longueur  $a+b$ , alors le mouvement de  $M$  sera circulaire et de vitesse égale à  $(a+b)\dot{\theta}$ . Le fait qu'il y ait une articulation augmente la vitesse de  $b\dot{\varphi}$ .

## Exercice 1

Un bateau de volume globale  $V_b$  et de masse volumique  $\rho_b$  est attaché à un port maritime. Le volume du bateau plongé dans l'eau est  $V_e$ . Soit  $\rho_e$  la masse volumique de l'eau. Quelle est la condition pour que le bateau flotte sur l'eau ?

## Exercice 2 : particule chargée dans une région où règne un champ magnétique constant

Une particule  $M$  de charge  $q$  et de masse  $m$  est soumise à l'action d'un champ magnétique constant  $\vec{B}$ . Soit  $\mathcal{R}(O, XYZ)$  un référentiel galiléen muni de la base orthonormée directe  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  telle que  $\vec{B} = B\vec{k}$ . La vitesse initiale de la particule est  $\vec{v}_0 = \vec{v}_{0\perp} + \vec{v}_{0//}$ , telles que  $\vec{v}_{0\perp} = v_{0x}\vec{i} + v_{0y}\vec{j}$ , la projection de la vitesse sur le plan  $(OXY)$ , et  $\vec{v}_{0//} = v_{0z}\vec{k}$ , la composante de la vitesse parallèle au champ magnétique. On note  $\omega_c = \frac{qB}{m}$ .

On néglige l'action du poids devant l'action du champ magnétique.

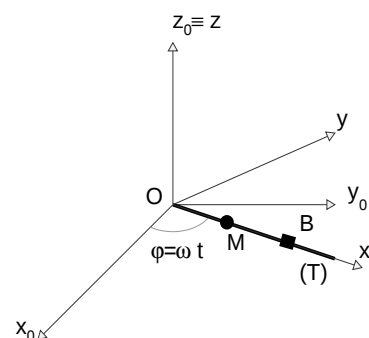
1. Donner l'expression de la force  $\vec{F}_B$  à laquelle la particule est soumise par l'action du champ magnétique.
2. Appliquer le PFD et montrer que  $\vec{v}_{0//}$  est une constante du mouvement.
3. Exprimer  $\left. \frac{d\vec{v}(M/\mathcal{R})}{dt} \right|_{\mathcal{R}}$  et déduire que le module  $v = \|\vec{v}(M/\mathcal{R})\|$  est constant. En déduire que  $v_{\perp}$  est aussi une constante du mouvement.
4. Projeter le PFD dans la base cartésienne et déduire les équations différentielles en  $v_x$ ,  $v_y$  et  $v_z$ .
5. Résoudre les équations précédentes et montrer que les équations horaires du mouvement sont

$$\begin{cases} x &= \frac{v_{0\perp}}{\omega_c} \sin \omega_c t \\ y &= \frac{v_{0\perp}}{\omega_c} (1 - \cos \omega_c t) \\ z &= v_{0//} t \end{cases}$$

avec  $x(0) = y(0) = z(0) = 0$  et  $\vec{v}_0 = \vec{v}_{0\perp} + \vec{v}_{0//}$  avec  $\vec{v}_{0\perp} = v_{0\perp}\vec{i}$ . Quelle la nature de la trajectoire ?

## Exercice 3 : Masselotte en rotation sur une tige

Une masselotte ponctuelle  $M$ , de masse  $m$ , peut glisser sans frottement sur une tige  $(T)$  perpendiculaire en  $O$  à l'axe vertical  $Oz$ , voir figure ci-contre. Soit  $\mathcal{R}_0(Ox_0y_0z_0)$  un repère galiléen fixe orthonormé direct. Soient  $(\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$  la base cartésienne associée. Soit  $\mathcal{R}(Oxyz)$  un repère orthonormé lié à la tige  $(T)$  muni de la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . L'axe  $Oz$  est entraîné par un moteur qui fait tourner la tige  $(T)$  à la vitesse angulaire constante  $\omega$  dans le plan horizontal  $Ox_0y_0$ . La masselotte est repérée par ses coordonnées polaires,  $(\rho, \varphi)$ , dans  $\mathcal{R}_0$ .



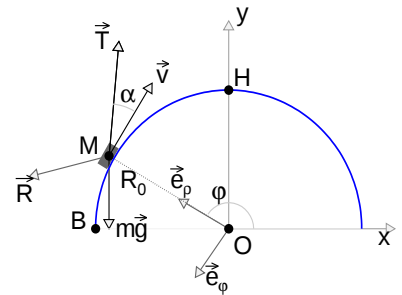
A l'instant initial  $t = 0$ , la tige ( $T$ ) est confondue avec l'axe  $Ox_0$  et la masselote est lancée depuis le point  $O$  avec une vitesse  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{i}$  où  $v_0 > 0$ .

1. Effectuer le bilan des forces agissant sur  $M$  dans le repère  $\mathcal{R}$  et exprimer la relation fondamentale de la dynamique dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .
2. Déterminer l'équation horaire du mouvement  $\rho(t)$  et les composantes de la réaction de la tige ( $T$ ) sur  $M$ .
3. Etablir la vitesse  $\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)$ . Par application du théorème du moment cinétique en  $O$  dans  $\mathcal{R}_0$ , retrouver les composantes de la réaction de ( $T$ ) sur  $M$ .
4. A la distance  $D$  de  $O$ , on place au point  $B$  un obstacle ( $B$ ) fixé sur ( $T$ ). A l'instant  $t_B$ , la masselote  $M$  vient buter sur ( $B$ ). Si la tige effectue un tour complet en  $16s$ , avec  $v_0 = 0,393\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$  et  $D = 2.3\text{m}$ , calculer  $t_B$ .
5. Exprimer la réaction  $\vec{R}_H$  de ( $B$ ) sur  $M$  quand la masselotte est arrêtée par ( $B$ ).

## Exercice 4 : Forces de frottement solide

Un homme tire une caisse  $M$  de bas en haut d'une colline dont la forme est assimilée à un cercle de rayon  $R_0$ , de centre  $O$ . Il exerce une force de traction  $\vec{T}$  constante en norme et faisant un angle  $\alpha$  avec le sol, voir figure ci-contre.

1. Calculer le travail de  $\vec{T}$  sur le trajet.
2. Sachant que l'homme se déplace à une vitesse constante  $v_0$ , déterminer la réaction normale du sol sur la caisse  $\vec{R}_N$  en fonction de  $m, g, \varphi, T, \alpha, R_0$  et  $v_0$ .
3. En utilisant la loi de Coulomb,  $|\vec{R}_T| = f|\vec{R}_N|$ ,  $f$  étant une constante, déterminer le travail de la force de frottement.



## Exercice 5 : Force de frottement fluide

Un cycliste se déplace sur une ligne droite et fournit une puissance mécanique constante  $P$ . Les forces de frottement de l'air sont proportionnelles au carré de la vitesse du cycliste  $\vec{F}_f = -kv\vec{v}$ ,  $k$  étant une constante positive. On néglige les forces de frottement du sol sur la roue. Le système formé par le cycliste et le vélo est considéré comme un point matériel. On choisit un axe horizontal  $Ox$  et le repère terrestre est supposé galiléen.

1. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique dans sa forme différentielle, établir l'équation différentielle que vérifie le module de la vitesse  $v$  et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme

$$mv^2 \frac{dv}{dx} = P - kv^3.$$

2. En posant  $f(x) = P - kv^3$ , déduire l'équation différentielle vérifiée par  $f(x)$ . Intégrer l'équation et déduire l'expression du module de la vitesse  $v$  en fonction de  $x$ , si le module de la vitesse initiale du cycliste est  $v_0$ .

## Exercice 1 : Poussée d'Archimède

Soit  $\mathcal{R}$  le repère lié au port qui est galiléen telle que l'accélération de la pesanteur est  $\vec{g} = g\vec{k}$ , où  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  sa base cartésienne. Le bateau est attaché au port donc il est au repos et par conséquent la force de frottement fluide de l'eau sur le bateau est nulle. Aussi, les forces appliquées sur le bateau sont

- le poids :  $\vec{P} = m_b \vec{g} = \rho_b V_b g \vec{k}$  ;
- la poussée d'Archimède  $\vec{F}_{ar}$  : elle est égale au poids du volume d'eau  $V_e$  et dirigée selon  $-\vec{k}$  ; ce qui donne  $\vec{F}_{ar} = -\rho_e V_e g \vec{k}$  ;

Comme le bateau est au repos, alors l'application du PFD donne

$$\vec{P} + \vec{F}_{ar} = \vec{0} \implies m_b \vec{g} - \rho_e V_e g \vec{k} = \rho_b V_b g \vec{k} - \rho_e V_e g \vec{k} = \vec{0} \implies \frac{\rho_b}{\rho_e} = \frac{V_e}{V_b}.$$

ce qui donne la condition pour que le bateau flotte sur l'eau.

## Exercice 2 : particule chargée dans une région où règne un champ magnétique constant

Une particule  $M$  de charge  $q$  et de masse  $m$  est soumise à l'action d'un champ magnétique constant  $\vec{B}$ . Soit  $\mathcal{R}(O, XYZ)$  un référentiel galiléen muni de la base orthonormée directe  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  telle que  $\vec{B} = B\vec{k}$ . La vitesse initiale de la particule est  $\vec{v}_0 = \vec{v}_{0\perp} + \vec{v}_{0//}$ , telles que  $\vec{v}_{0\perp} = v_{0x}\vec{i} + v_{0y}\vec{j}$ , la projection de la vitesse sur le plan  $(OXY)$ , et  $\vec{v}_{0//} = v_{0z}\vec{k}$ , la composante de la vitesse parallèle au champ magnétique. On note  $\omega_c = \frac{qB}{m}$ .

On néglige l'action du poids devant l'action du champ magnétique.

On note dans la suite  $\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{v}$ .

1. L'expression de la force  $\vec{F}_B$  est donnée par

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \wedge \vec{B}.$$

2. Comme nous négligeons le poids de la particule chargée, la seule force qui s'exerce sur  $M$  est  $\vec{F}_B$ .  $\mathcal{R}$  est galiléen, alors le PFD dans  $\mathcal{R}$  donne

$$\vec{F}_B = m \frac{d\vec{v}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} \implies \frac{d\vec{v}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = -\frac{qB}{m} \vec{k} \wedge \vec{v}.$$

Soit  $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$  avec  $v_z = v_{//}$ , alors

$$\begin{aligned}
 \vec{k} \wedge \vec{v} &= \vec{k} \wedge (v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_{//} \vec{k}) \\
 &= v_x \vec{j} - v_y \vec{i} \\
 \Rightarrow \left. \frac{d}{dt} \vec{v} \right|_{\mathcal{R}} &= \dot{v}_x \vec{i} + \dot{v}_y \vec{j} + \dot{v}_z \vec{k} \\
 &= -\frac{qB}{m} (v_x \vec{j} - v_y \vec{i}) \Rightarrow \dot{v}_z = 0 \Rightarrow v_z = v_{//} = \text{Constante}
 \end{aligned}$$

3. Nous avons établi que

$$\left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = -\frac{qB}{m} \vec{k} \wedge \vec{v}$$

sachant que la dérivée d'un vecteur quelconque  $\vec{A}$  dans  $\mathcal{R}$  avec  $\vec{u}_A = \vec{A}/\|\vec{A}\|$  est donnée par

$$\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \frac{d\|\vec{A}\|}{dt} \vec{u}_A + \vec{\Omega}(\vec{A}/\mathcal{R}) \wedge \vec{A}.$$

En appliquant ce résultat à

$$\left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = -\frac{qB}{m} \vec{k} \wedge \vec{v}$$

on en déduit que  $\frac{d\|\vec{v}\|}{dt} = 0 \Rightarrow \|\vec{v}\| = v$  est constant et que  $\vec{v}$  est en rotation dans  $\mathcal{R}$  avec le vecteur rotation  $-\frac{qB}{m} \vec{k}$ .

Comme  $v^2 = v_{\perp}^2 + v_{//}^2$ , d'une part, et  $v$  et  $v_{//}$  sont constants, d'autre part, alors  $v_{\perp}$  est constant.

4. Développons le PFD dans la base cartésienne, sachant que  $\vec{B} = B\vec{k}$

$$\begin{aligned}
 m \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + m \frac{dv_y}{dt} \vec{j} + m \frac{dv_z}{dt} \vec{k} &= q (v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}) \wedge B\vec{k} \\
 &= qBv_y \vec{i} - qBv_x \vec{j}
 \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} - \frac{qB}{m} v_y = 0 \\ \frac{dv_y}{dt} + \frac{qB}{m} v_x = 0 \\ \frac{dv_z}{dt} = 0 \end{cases}$$

On constate que les deux premières équations sont couplées, c'est à dire  $v_x$  et  $v_y$  figurent dans les deux équations. La composante de la vitesse selon  $Oz$  est constante et égale à la composante de la vitesse selon  $Oz$  à l'instant  $t = 0$ ,  $v_z = v_{0//}$ .

5. Reprenons les équations précédentes en remplaçant  $v_x = \dot{x}$ ,  $v_y = \dot{y}$  et  $v_z = \dot{z}$  ce qui donne en premier  $z = v_{0\perp}/t + K$  avec  $K = z(0) = 0$ . De même

$$\ddot{y} = -\frac{qB}{m}\dot{x} \implies \dot{y} = -\omega_c x + K$$

or  $x(0) = 0$  et  $\dot{y}_0 = 0$  alors  $K = 0$

$$\ddot{x} = \omega_c \dot{y} = -\omega_c^2 x \implies \ddot{x} + \omega_c^2 x = 0$$

qui est une équation de second ordre à coefficients constants sans second membre. La solution est  $x = A \sin(\omega_c t - \varphi_0)$  avec  $x(0) = 0 = A \sin \varphi_0 \implies \varphi_0 = 0$ , puisque  $A \neq 0$ , et  $\dot{x}(0) = v_{0\perp} = A \omega_c \cos \varphi_0 \implies A = v_{0\perp}/\omega_c$  et la solution est

$$x(t) = \frac{v_{0\perp}}{\omega_c} \sin \omega_c t.$$

L'équation en  $y$  est alors

$$\dot{y} = -\omega_c x = -v_{0\perp} \sin \omega_c t \implies y = +\frac{v_{0\perp}}{\omega_c} \cos \omega_c t + K$$

or  $y(0) = 0 \implies K = -\frac{v_{0\perp}}{\omega_c}$  ce qui donne finalement

$$\begin{cases} x = \frac{v_{0\perp}}{\omega_c} \sin \omega_c t \\ y = -\frac{v_{0\perp}}{\omega_c} (1 - \cos \omega_c t) \\ z = v_{0\parallel} t. \end{cases}$$

A partir des expressions précédentes, on a

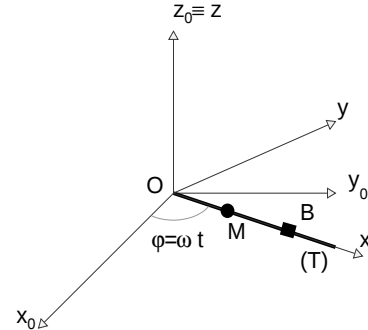
$$x^2 + \left(y + \frac{v_{0\perp}}{\omega_c}\right)^2 = \frac{v_{0\perp}^2}{\omega_c^2} \quad \text{et} \quad z = v_{0\parallel} t$$

qui sont respectivement les équations d'un cercle de centre  $(0, -\frac{v_{0\perp}}{\omega_c})$  et de rayon  $\frac{v_{0\perp}}{\omega_c}$  dans le plan  $(Oxy)$  et d'un mouvement de translation rectiligne uniforme selon  $Oz$ . C'est un mouvement hélicoïdal et la trajectoire est une spirale autour de  $Oz$ .



### Exercice 3 : Masselotte en rotation sur une tige

Une masselotte ponctuelle  $M$ , de masse  $m$ , peut glisser sans frottement sur une tige  $(T)$  perpendiculaire en  $O$  à l'axe vertical  $Oz$ , voir figure ci-contre. Soit  $\mathcal{R}_0(Ox_0y_0z_0)$  un repère galiléen fixe orthonormé direct. Soient  $(\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$  la base cartésienne associée. Soit  $\mathcal{R}(Oxyz)$  un repère orthonormé lié à la tige  $(T)$  muni de la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . L'axe  $Oz$  est entraîné par un moteur qui fait tourner la tige  $(T)$  à la vitesse angulaire constante  $\omega$  dans le plan horizontal  $Ox_0y_0$ . La masselotte est repérée par ses coordonnées polaires,  $(\rho, \varphi)$ , dans  $\mathcal{R}_0$ .



À l'instant initial  $t = 0$ , la tige  $(T)$  est confondue avec l'axe  $Ox_0$  et la masselotte est lancée depuis le point  $O$  avec une vitesse  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{i}$  où  $v_0 > 0$ .

1. Dans le référentiel  $\mathcal{R}$  non galiléen, les forces appliquées à la masselotte sont

- i- le poids  $m\vec{g} = -mg\vec{k}$ ,
- ii- la réaction de la tige qui est normale à celle-ci, et donc  $\perp$  à  $Ox$ , puisque les frottements sont négligeables,  $\vec{R} = R_z\vec{k} + R_y\vec{j}$ ,
- iii- la force d'inertie d'entraînement  $\vec{f}_{ie}$  à déterminer,
- iv- la force d'inertie de Coriolis  $\vec{f}_{ic}$  à déterminer.

Pour exprimer le PFD dans  $\mathcal{R}$ , il faut donc expliciter les expressions des forces d'inertie.

Notons que  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}_0$  ont la même origine. Le vecteur position de  $M$  est  $\vec{OM} = \rho\vec{i}$  ce qui implique que

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \dot{\rho}\vec{i} \text{ et } \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = \ddot{\rho}\vec{i}.$$

$\mathcal{R}$  est lié à la tige alors il est animé d'un mouvement de rotation uniforme ; ce qui implique que  $\vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0) = \omega\vec{k}$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \vec{V}_e &= \vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{OM} \\ &= \omega\vec{k} \wedge \rho\vec{i} = \rho\omega\vec{j} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}_e &= \vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0) \wedge (\vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{OM}) \\ &= \omega\vec{k} \wedge \rho\omega\vec{j} = -\rho\omega^2\vec{i} \implies \vec{f}_{ie} = m\rho\omega^2\vec{i} \text{ (centrifuge)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}_c &= 2\vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{V}(M/\mathcal{R}) \\ &= 2\omega\vec{k} \wedge \dot{\rho}\vec{i} = 2\dot{\rho}\omega\vec{j} \implies \vec{f}_{ic} = -2m\dot{\rho}\omega\vec{j}.\end{aligned}$$

Finalement, le PFD dans  $\mathcal{R}$  donne

$$\begin{aligned}m\vec{g} + \vec{R} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic} &= m\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) \\ \implies -mg\vec{k} + R_y\vec{j} + R_z\vec{k} + m\rho\omega^2\vec{i} - 2m\dot{\rho}\omega\vec{j} &= m\ddot{\rho}\vec{i}\end{aligned}$$

2. L'équation du mouvement est obtenue en projetant le PFD sur  $\vec{i}$ , ce qui donne

$$\ddot{\rho} - \omega^2\rho = 0.$$

C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants et sans second membre. L'équation caractéristique est  $r^2 - \omega^2 = 0 \implies r = \pm\omega$  et la solution est  $\rho(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$ .  $A$  et  $B$  sont déterminées à partir des conditions initiales  $\rho(0) = 0 \implies A + B = 0$  et  $\dot{\rho}(0) = v_0 = \omega(A - B) \implies A = v_0/2\omega$  et  $B = -v_0/2\omega$ . Aussi la solution est

$$\rho(t) = \frac{v_0}{2\omega} (e^{\omega t} - e^{-\omega t}) = \frac{v_0}{\omega} \sinh(\omega t).$$

La réaction de la tige s'obtient en projetant le PFD respectivement sur les axes  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$ , ce qui permet d'obtenir

$$R_z = mg \text{ et } R_y = 2m\dot{\rho}\omega.$$

3. calculons  $\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)$  :

$$\begin{aligned}\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) &= \vec{V}(M/\mathcal{R}) + \vec{V}_e \\ &= \dot{\rho}\vec{i} + \rho\omega\vec{j} \\ &= v_0 (\cosh(\omega t)\vec{i} + \sinh(\omega t)\vec{j}).\end{aligned}$$

Le moment cinétique de  $M$  par rapport à  $O$  dans  $\mathcal{R}_0$  est donné par

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_O(M/\mathcal{R}_0) &= \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) \\ &= \rho\vec{i} \wedge m(\dot{\rho}\vec{i} + \rho\omega\vec{j}) \\ &= m\rho^2\omega\vec{k}.\end{aligned}$$

Le théorème du moment cinétique par rapport à  $O$  dans  $\mathcal{R}$  est donné par

$$\begin{aligned}\left. \frac{d\vec{\sigma}_O(M/\mathcal{R}_0)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} &= \overrightarrow{OM} \wedge (m\vec{g} + \vec{R}) \\ \implies 2m\rho\dot{\rho}\omega\vec{k} &= \rho\vec{i} \wedge (-mg\vec{k} + R_y\vec{j} + R_z\vec{k}) \\ \implies 2m\rho\dot{\rho}\omega\vec{k} &= m\rho g\vec{j} + \rho R_y\vec{k} - \rho R_z\vec{j}\end{aligned}$$

et en projetant sur les différents axes, on obtient

$$\begin{aligned} R_y &= 2m\dot{\rho}\omega \\ R_z &= mg \end{aligned}$$

qui ne sont d'autres que les expressions déjà établies.

4. L'équation horaire donne

$$D = \frac{v_0}{\omega} \sinh \omega t_B \implies t_B = \frac{1}{\omega} \operatorname{argsh} \left( \frac{\omega D}{v_0} \right)$$

La tige effectue un tour complet,  $2\pi$ , en  $\Delta t_{\text{tour}} = 16s$  alors  $\omega = 2\pi/\Delta t_{\text{tour}}$  ce qui donne

$$t_B = \frac{\Delta t_{\text{tour}}}{2\pi} \operatorname{argsh} \left( \frac{2\pi D}{v_0 \Delta t_{\text{tour}}} \right)$$

**A.N. :**

$$\begin{aligned} t_B &= \frac{16}{2 \times 3.141516} \operatorname{argsh} \left( \frac{2 \times 3.141516 \times 2.3}{0.393 \times 16} \right) \\ &\simeq 4s. \end{aligned}$$

5. Lorsque la masselotte est arrêtée par  $B$ , alors  $\dot{\rho} = 0$  et partant de l'expression du PFD, en remplaçant  $\dot{\rho} = 0$ , on obtient

$$\begin{aligned} R_y &= 0 \\ R_z &= mg. \end{aligned}$$

## Supplément à l'exercice 3

La réaction dont il est question dans l'exercice est  $\vec{R}_H = R_y \vec{j}$ . En fait, pour retrouver la composante de la réaction selon  $\vec{i}$ , il suffit de reprendre le PFD, d'ajouter la réaction de la butée selon  $\vec{i}$ , que l'on note  $\vec{R}_B$ , et de l'appliquer dans le référentiel relatif  $\mathcal{R}$ . Notons bien que la réaction de la barre sur la masselotte selon  $\vec{i}$  est toujours nulle en raison de l'absence des frottements. Aussi, nous avons

$$\vec{R} + \vec{R}_B + m\vec{g} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic} = m\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$$

Sachant que la masselotte est arrêtée par la butée, ce qui implique qu'elle est à l'équilibre dans  $\mathcal{R}$  et donc  $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = \vec{0}$  et  $\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{0} \implies \dot{\rho} = 0 \implies \rho = D$ , nous obtenons

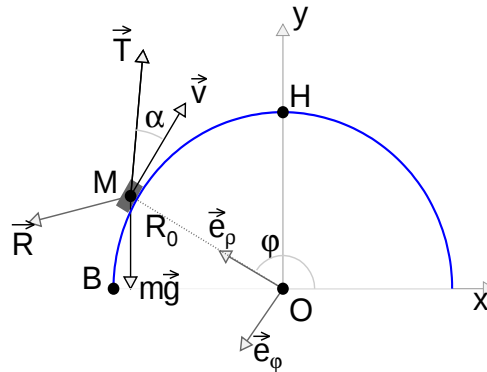
$$R_y \vec{j} + R_z \vec{k} + R_B \vec{i} - mg \vec{k} + mD\omega^2 \vec{i} = \vec{0}$$

ce qui implique que

$$\begin{cases} R_y &= 0 \\ R_z &= mg \\ R_B &= -mD\omega^2. \end{cases}$$

## Exercice 4 : Forces de frottement solide

Un homme tire une caisse  $M$  de bas en haut d'une colline dont la forme est assimilée à un cercle de rayon  $R_0$ , de centre  $O$ . Il exerce une force de traction  $\vec{T}$  constante en norme et faisant un angle  $\alpha$  avec le sol, voir figure ci-contre.



Nous avons  $\vec{\Omega}(\vec{e}_\rho/\mathcal{R}) = \dot{\varphi}\vec{k}$ . Noter que  $\dot{\varphi}$  est algébrique et négative et donc  $\vec{V}(M/\mathcal{R}) = R_0\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$  et  $\vec{dl} = R_0d\varphi\vec{e}_\varphi$  ont le bon sens implicitement.

1. Calculons le travail de  $\vec{T}$  pour aller du bas de la colline, point  $B(\varphi = \pi)$ , vers le haut de la colline, le point  $H(\varphi = \pi/2)$ .

$$\begin{aligned}\delta W_B^H(\vec{T}) &= \vec{T} \cdot \vec{dl} \\ &= T (\sin\alpha\vec{e}_\rho - \cos\alpha\vec{e}_\varphi) \cdot (R_0d\varphi)\vec{e}_\varphi \\ &= -R_0T\cos\alpha d\varphi \implies W_B^H(\vec{T}) = \int_\pi^{\pi/2} \delta W_B^H(\vec{T}) = +\frac{\pi}{2}R_0T\cos\alpha\end{aligned}$$

**Le travail est moteur par rapport à  $M$  puisque ce dernier est déplacé vers le haut.**

2. Si l'homme se déplace avec une vitesse constante  $v_0$ ,  $\vec{v} = -v_0\vec{e}_\varphi$ , la caisse se déplace aussi avec la même vitesse. Pour Déterminer la réaction  $R_N$ , nous appliquons le PFD.

Calculons l'accélération.

$\vec{OM} = R_0\vec{e}_\rho \implies \vec{v} = R_0\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$ . Comme  $v$  est constant alors  $R_0\dot{\varphi}$  est constant et  $\dot{\varphi} = -v_0/R_0$ . L'accélération de  $M$  est  $\vec{\gamma} = -R_0\dot{\varphi}^2\vec{e}_\rho = -\frac{v_0^2}{R_0}\vec{e}_\rho$ . Les forces appliquées à  $M$  sont

$$\begin{aligned}\vec{T} &= T (\sin\alpha\vec{e}_\rho - \cos\alpha\vec{e}_\varphi) \\ \vec{R} &= \vec{R}_N + \vec{R}_T = R_N\vec{e}_\rho + R_T\vec{e}_\varphi \\ \vec{P} &= m\vec{g} = mg (-\sin(\pi - \varphi)\vec{e}_\rho + \cos(\pi - \varphi)\vec{e}_\varphi) = -mg (\sin\varphi\vec{e}_\rho + \cos\varphi\vec{e}_\varphi)\end{aligned}$$

que  $\vec{g}$  fait un angle  $\pi - \varphi$  avec  $\vec{e}_\varphi$ . Le PFD s'écrit comme suit

$$\begin{aligned} m\vec{\gamma} &= \vec{T} + \vec{R} + m\vec{g} \\ -m\frac{v_0^2}{R_0}\vec{e}_\rho &= T(\sin\alpha\vec{e}_\rho - \cos\alpha\vec{e}_\varphi) + R_N\vec{e}_\rho + R_T\vec{e}_\varphi - mg(\sin\varphi\vec{e}_\rho + \cos\varphi\vec{e}_\varphi) \\ &= (T\sin\alpha + R_N - mg\sin\varphi)\vec{e}_\rho - (T\cos\alpha - R_T + mg\cos\varphi)\vec{e}_\varphi. \end{aligned}$$

La projection selon  $\vec{e}_\rho$  nous permet d'avoir

$$T\sin\alpha + R_N - mg\sin\varphi = -m\frac{v_0^2}{R_0} \implies R_N = m\left(g\sin\varphi - \frac{v_0^2}{R_0}\right) - T\sin\alpha$$

3. Calculons le travail de la force de frottement  $\vec{R}_T = f|\vec{R}_N|\vec{e}_\varphi$  :

$$\begin{aligned} \delta W_B^H(\vec{R}_T) &= f|\vec{R}_N|\vec{e}_\varphi \cdot (+R_0 d\varphi)\vec{e}_\varphi \\ &= +fR_0 \left[ m\left(g\sin\varphi - \frac{v_0^2}{R_0}\right) - T\sin\alpha \right] d\varphi \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} W_B^H(\vec{R}_T) &= \int_{\pi}^{\pi/2} \delta W_B^H(\vec{R}_T) \\ &= -fR_0 \left[ m\left(-g + \frac{\pi}{2}\frac{v_0^2}{R_0}\right) + T\frac{\pi}{2}\sin\alpha \right] \end{aligned}$$

## Exercice 5 : Force de frottement fluide

Un cycliste se déplace sur une ligne droite et fournit une puissance mécanique constante  $P$ . Les forces de frottement de l'air sont proportionnelles au carré de la vitesse du cycliste  $\vec{F}_f = -kv\vec{v}$ ,  $k$  étant une constante positive. On néglige les forces de frottement du sol sur la roue. Le système formé par le cycliste et le vélo est considéré comme un point matériel. On choisit un axe horizontal  $Ox$  et le repère terrestre est supposé galiléen.

1. Les forces qui sont appliquées au cycliste sont

- le poids, perpendiculaire au déplacement et donc ne travaille pas et donc sa puissance est nulle ;
- la réaction normale  $R_N$ , la réaction tangentielle est négligée car les frottements sont négligeables. Elle est normale au déplacement et donc ne travaille pas et sa puissance est nulle ;
- la force de frottement visqueux  $\vec{F} = -kv\vec{v}$ .

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique dans sa forme différentielle, exprimée en fonction des puissances :

$$\frac{dE_c}{dt} = P(\vec{F}) + P(\text{mecanique})$$

$$\begin{aligned}
\frac{m}{2} \frac{dv^2}{dt} &= -kv\vec{v} \cdot \vec{v} + P \\
mv \frac{dv}{dt} &= P - kv^3 \\
mv \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} &= P - kv^3 \\
mv^2 \frac{dv}{dx} &= P - kv^3
\end{aligned}$$

qui n'est d'autre que l'équation recherchée.

2. En posant  $f(x) = P - kv^3$ , nous avons  $\frac{df(x)}{dx} = -3kv^2 \frac{dv}{dx}$ . Aussi, on a

$$\frac{-m}{3k} \frac{df(x)}{dx} = f(x) \implies \frac{df(x)}{dx} + \frac{3k}{m} f(x) = 0$$

qui est une équation différentielle de premier ordre sans second membre à coefficients constants. La solution est obtenue en séparant les variables

$$\frac{df(x)}{f(x)} = -\frac{3k}{m} dx \implies f(x) = Ae^{-\frac{3k}{m}x}$$

où  $A$  est une constante que l'on détermine des conditions initiales. En remplaçant  $f(x)$  par son expression, on obtient

$$P - kv^3 = Ae^{-\frac{m}{3k}x} \implies v(x) = \left( \frac{P}{k} - \frac{A}{k} e^{-\frac{m}{3k}x} \right)^{1/3}$$

comme  $v(x=0) = v_0$ , alors  $A = P - kv_0^3$  et la solution se met sous la forme

$$v(x) = \left[ \frac{1}{k} \left( P - [P - kv_0^3] e^{-\frac{m}{3k}x} \right) \right]^{1/3}$$

Module de Mécanique du Point Matériel  
Série N° 4  
Filières SMP/SMC/SMA

### Exercice 1 : Théorème de l'énergie mécanique

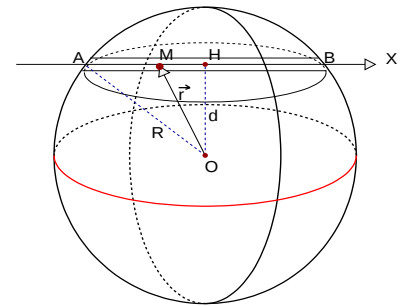
Soit  $M$  un véhicule que l'on considère, comme un point matériel, situé à l'intérieur de la Terre à une distance  $r$  de son centre.  $M$  subit l'attraction gravitationnelle de la masse de la sphère de rayon  $r$  concentrée en  $O$ . On considère que la forme de la Terre est sphérique et que sa masse volumique est constante. On note le rayon de la Terre par  $R_T$ .  $g_0$  est l'accélération de la pesanteur à la surface de la Terre.

1. Montrer que l'attraction gravitationnelle peut se mettre sous la forme

$$\vec{F} = -mg_0 \frac{r}{R_T} \vec{e}_r.$$

où  $\vec{e}_r$  est le vecteur radial de la base sphérique. En déduire l'énergie potentielle  $E_p$  dont dérive  $\vec{F}$ . On prend  $E_p(r=0) = 0$ .

Soit un tunnel rectiligne  $AB$  ne traversant pas  $O$  et muni de l'axe  $HX$ , voir figure ci-contre. On note  $OH = d$ . Un véhicule assimilé à un point matériel de masse  $m$  glisse sans frottement dans le tunnel. Il part du point  $A$  de la surface terrestre sans vitesse initiale. On repère la position du véhicule dans le tunnel par  $\vec{OM} = \vec{OH} + \vec{HM} = d \vec{k}_0 + \vec{x}$ .



2. Calculer la vitesse du véhicule. En déduire son énergie cinétique.
3. Calculer l'énergie mécanique  $E_m$  et montrer qu'elle est constante. Quelle est sa valeur ?
4. Calculer la vitesse maximale du véhicule ?
5. En utilisant le théorème de l'énergie mécanique, établir l'équation différentielle. Résoudre l'équation et montrer que l'équation horaire est donnée par

$$x(t) = \sqrt{R_T^2 - d^2} \cos \sqrt{\left(\omega^2 + \frac{g_0}{R_T}\right)} t.$$

## Mouvement dans un champ de force centrale

### Exercice 2 : Orbite géostationnaire

On rappelle qu'une orbite géostationnaire est celle d'un satellite restant toujours à la verticale d'un même point du globe terrestre.

On note par  $S$  le satellite que l'on considère comme un point matériel. La période de rotation de la Terre est  $T = 86164s$ , son rayon  $R_T \simeq 6.4 \times 10^3 km$  et sa masse  $M_T \simeq 6 \times 10^{24} kg$ . La constante gravitationnelle est  $G \simeq 6.7 \times 10^{-11} S.I.$ .

1. Calculer la vitesse angulaire  $\Omega_g$  d'un satellite sur l'orbite géostationnaire. Quel est le référentiel d'étude  $\mathcal{R}_g$  ? Est-il galiléen ?

2. On se propose d'établir les expressions du rayon de l'orbite géostationnaire  $R_g$  ainsi que son altitude  $h_g$ .
  - a) Montrer que le mouvement du satellite est plan. Etablir l'expression de l'accélération du satellite  $\vec{\gamma}(S/\mathcal{R}_g)$ . En utilisant le PFD, déduire l'expression de  $R_g$  ainsi que celle de  $h_g$ . Faire leurs applications numériques.
  - b) En déduire la valeur de la vitesse  $v_g = \|\vec{v}_g(S/\mathcal{R})\|$  du satellite sur l'orbite géostationnaire. Faire son application numérique.
  - c) Montrer que cette orbite est forcément dans le plan de l'équateur.

### Exercice 3 : orbite elliptique

Avant de placer un satellite sur une orbite géostationnaire, le lanceur des satellites, comme Ariane pour l'exemple, l'injecte à la périgée d'une orbite elliptique, dite orbite de transfert, à une altitude  $h_0 = 200\text{km}$  de la base de lancement et avec une vitesse, que l'on note  $v_0$ , telle que l'apogée  $A$  de l'orbite de transfert soit sur l'orbite géostationnaire. Au moment où le satellite se trouve en  $A$ , on actionne des moteurs qui réajuste sa vitesse et le transfèrent sur l'orbite géostationnaire.

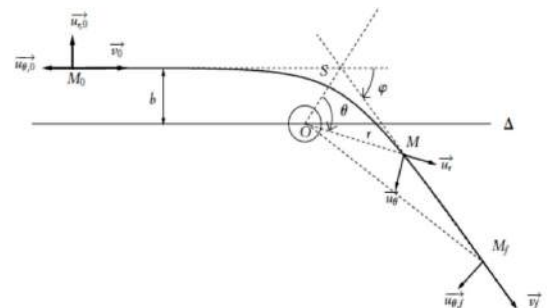
**Les notations et les résultats de l'exercice précédents concernant une orbite géostationnaire sont utilisés sans démonstration.**

1. Déterminer les paramètres de l'ellipse : le demi grand-axe  $a$ , l'excentricité  $e$  et le paramètre  $p$  en fonction de  $R_T$ ,  $h_0$  et  $h_g$ . Faire leurs applications numériques.
2. En utilisant la formule de Binet de l'accélération, d'une part, et du PFD, d'autre part, établir la relation entre la constante des aires  $C$  en fonction de  $M_T$ ,  $G$  et  $p$ .
3. En déduire la vitesse  $v_0$  à donner au satellite lors de son lancement et la vitesse  $v_1$  qu'il atteint à l'apogée  $A$ . Faire leurs applications numériques.
4. Quelle est la différence des vitesses en  $A$  que doivent fournir les moteurs pour que le satellite soit placé sur son orbite géostationnaire ?
5. En utilisant la troisième loi de Kepler, calculer le temps que passe le satellite sur l'orbite de transfert.

### Exercice 4 : Orbite hyperbolique

Une météorite  $M$  a, très loin de la Terre, une vitesse  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_\Delta$  portée par une droite située à la distance  $b$  de l'axe  $(\Delta)$  du centre de la Terre  $O$ , voir figure ci-contre. On note par  $m$  la masse du météorite,  $M_T$  la masse de la Terre,  $R_T$  son rayon et  $G$  la constante de gravitation universelle. On travaille dans le référentiel géocentrique, supposé galiléen. La position de  $M$  est repérée par les coordonnées polaires  $(r, \theta)$ ,  $\vec{OM} = r\vec{u}_r$ . La trajectoire du météorite est une branche d'hyperbole de foyer  $O$ , le centre de la Terre.

**Noter bien que l'on utilise les notations  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  pour la base polaire et  $(r, \theta)$  les coordonnées correspondantes.**



1. Montrer que le moment cinétique de la météorite par rapport à  $O$  et son énergie mécanique sont conservés.
2. En déduire l'expression de  $r_{min}$ , lorsque la météorite se trouve au sommet  $S$  de l'hyperbole, en fonction de  $v_0$ ,  $G$ ,  $M_T$  et  $b$ .
3. Déterminer la valeur minimale  $b_{min}$  de  $b$  pour que la météorite ne rencontre pas la Terre.
4. Dans le cas où  $b > b_{min}$ , déterminer l'angle de déviation  $\varphi$  de la météorite.



- $$M_r = \rho_T \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi r^3}{3} \times \frac{M_T}{\frac{4\pi R_T^3}{3}} = M_T \times \frac{r^3}{R_T^3}$$

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -K_G \frac{mM_r}{r^2} \vec{e}_r \\ &= -K_G \frac{mM_T \frac{r^3}{R_T^3}}{r^2} \vec{e}_r = -K_G m M_T \frac{r}{R_T^3} \vec{e}_r = -m g_0 \frac{r}{R_T} \vec{e}_r\end{aligned}$$
$$\begin{aligned} dE_p &= -\vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \textcolor{red}{m}g_0 \frac{r}{R_T} \vec{e}_r \cdot (dr\vec{e}_r + r d\vec{e}_r) = mg_0 \frac{r dr}{R_T} \implies E_p = mg_0 \frac{r^2}{2R_T} + K \end{aligned}$$

avec  $K = E_P(r = 0) = 0 \implies E_p = \textcolor{red}{m}g_0\frac{r^2}{2R_T}$ .

2. Notons par  $\vec{u}$  le vecteur unitaire de  $Ox$ . La position de  $M$  peut être repérée par  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = d\vec{k}_0 + x\vec{u}$ . La vitesse est égale à

$$\begin{aligned}\vec{V}(M/\mathcal{R}) &= \left. \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \\ &= \dot{x}\vec{u} + x \left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{u} + x \left( \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \vec{u} \right) = \dot{x}\vec{u} + x\omega\vec{k} \wedge \vec{u}\end{aligned}$$

ce qui donne pour le module de la vitesse  $V = |\vec{V}(M/\mathcal{R})| = \sqrt{\dot{x}^2 + x^2\omega^2}$  sachant que  $\vec{u} \perp \vec{k}$ .

L'énergie cinétique est égale à  $E_c = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + x^2\omega^2)$ .

3. L'énergie mécanique est donnée par  $E_m = E_c + E_p$

$$\begin{aligned}E_m &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + x^2\omega^2) + mg_0 \frac{r^2}{2R_T} \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + x^2\omega^2) + mg_0 \frac{x^2 + d^2}{2R_T}\end{aligned}$$

La seule force à laquelle est soumise  $M$  est la force gravitationnelle, qui est conservative, et comme  $E_m$  ne dépend pas explicitement du temps, alors elle est conservée.

La valeur de  $E_m$  est constante et égale à sa valeur à l'instant initial, sachant que  $\dot{x}_0 = 0$  et  $x_0 = \sqrt{R_T^2 - d^2}$ ,

$$\begin{aligned}E_{\textcolor{red}{m}} &= E_{\textcolor{red}{m}}(t=0) = \frac{1}{2}mx_0^2\omega^2 + mg_0 \frac{x_0^2 + d^2}{2R_T} \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2(R_T^2 - d^2) + mg_0 \frac{R_T}{2}\end{aligned}$$

4. La vitesse du véhicule  $M$  est maximale, son énergie cinétique aussi, si l'énergie potentielle du véhicule est minimale, car l'énergie mécanique est conservée. Rappelons que  $r$  varie entre  $d$  et  $R_T$ ,  $r \in [d, R_T]$ , voir figure. Comme  $E_p$  est une fonction strictement croissante en fonction de  $r$  dans cet intervalle, alors  $E_p$  est minimale pour  $r = d$  et donc

$$r = d \implies E_p(r=d) = E_p^{\min} \quad \text{et} \quad E_c(r=d) = E_c^{\max} = \frac{1}{2}mV_{\max}^2$$

ce qui donne en utilisant  $E_{\textcolor{red}{m}} = E_{\textcolor{red}{m}}^0 = E_p^{\min} + E_c^{\max}$ ,

$$\begin{aligned}E_c^{\max} &= E_{\textcolor{red}{m}}^0 - E_p^{\min} \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2(R_T^2 - d^2) + mg_0 \frac{R_T}{2} - mg_0 \frac{d^2}{2R_T}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mV_{max}^2 &= \frac{1}{2}m(R_T^2 - d^2)\left(\omega^2 + \frac{g_0}{R_T}\right) \\ \Rightarrow V_{max} &= \sqrt{(R_T^2 - d^2)\left(\omega^2 + \frac{g_0}{R_T}\right)}\end{aligned}$$

5. L'énergie cinétique étant conservée, sa dérivée par rapport au temps est nulle

$$\begin{aligned}\frac{dE_m}{dt} &= m(\dot{x}\ddot{x} + \omega^2 x\dot{x}) + x\dot{x}\frac{mg_0}{R_T} \\ &= m\dot{x}\left[\ddot{x} + \left(\omega^2 + \frac{mg_0}{R_T}\right)x\right] = 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \left(\omega^2 + \frac{g_0}{R_T}\right)x = 0 \quad \text{sachant que} \quad m\dot{x} \neq 0$$

qui est une équation différentielle de second ordre à coefficients constants. Les racines de l'équation caractéristique sont des nombres complexes imaginaires purs  $\pm i\sqrt{\omega^2 + \frac{g_0}{R_T}}$ , ce qui donne pour solution

$$x(t) = A\cos\left[\sqrt{\omega^2 + \frac{g_0}{R_T}}t - \alpha_0\right]$$

$A$  et  $\alpha_0$  sont déterminées à partir des conditions initiales

$$\left. \begin{aligned}x(t=0) = x_0 &= \sqrt{R_T^2 - d^2} = A\cos\alpha_0 \\ \dot{x}(t=0) = 0 &= A\sqrt{\omega^2 + \frac{g_0}{R_T}}\sin\alpha_0\end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha_0 = 0 \quad \text{et} \quad A = x_0 = \sqrt{R_T^2 - d^2}$$

d'où la solution

$$x(t) = \left(\sqrt{R_T^2 - d^2}\right)\cos\left[\sqrt{\omega^2 + \frac{g_0}{R_T}}t\right].$$

## Mouvement dans un champ de force centrale

### Corrigé de l'exercice 2 : Orbite géostationnaire

On rappelle qu'une orbite géostationnaire est celle d'un satellite restant toujours à la verticale d'un même point du globe terrestre.

On note par  $S$  le satellite que l'on considère comme un point matériel. La période de rotation de la Terre est  $T = 86164s$ , son rayon  $R_T \simeq 6.4 \times 10^3 km$  et sa masse  $M_T \simeq 6 \times 10^{24} kg$ . La constante gravitationnelle est  $G \simeq 6.7 \times 10^{-11} S.I..$

1. Comme le satellite doit rester toujours à la verticale d'un même point du globe terrestre, sa vitesse angulaire est la même que celle de la rotation de la Terre sur elle même. Comme la période de rotation de la Terre est  $T$ , alors

$$\Omega_g = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \Omega_g = \frac{2 \times \pi}{86164} \simeq 7.3 \times 10^{-5} s^{-1}.$$

Le référentiel d'étude  $R_g$  est le référentiel géocentrique. Il est galiléen car les distances parcourues par le satellite sont négligeables par rapport aux paramètres de la trajectoire de la Terre autour du soleil et donc  $R_g$  peut être considéré en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel héliocentrique (Copernic).

2. On se propose d'établir les expressions du rayon de l'orbite géostationnaire  $R_g$  ainsi que son altitude  $h_g$ .

- a) Le satellite est soumis à l'action de l'attraction gravitationnelle qui est une force centrale et donc le moment par rapport à l'origine  $O$  de  $\mathcal{R}_g$ , qui est confondu avec le centre de la terre, est nul. Grâce au théorème du moment cinétique, le moment cinétique du satellite par rapport à  $O$  dans  $\mathcal{R}_g$  est constant ce qui implique que la trajectoire a lieu dans le plan perpendiculaire au moment cinétique. Ce qui démontre bien que le mouvement est plan. Comme le mouvement est plan, on utilise les coordonnées polaires  $\rho$  et  $\varphi$ . Comme  $\Omega_g = \dot{\varphi}$  est constante et le mouvement est circulaire de rayon  $R_g$ , alors

$$\overrightarrow{OM} = R_g \vec{e}_\rho \implies \vec{V}(S/\mathcal{R}_g) = R_g \Omega_g \vec{e}_\varphi \implies \vec{\gamma}(S/\mathcal{R}_g) = -R_g \Omega_g^2 \vec{e}_\rho.$$

Le PFD permet d'écrire

$$\begin{aligned} m \vec{\gamma}(S/\mathcal{R}_g) &= -G \frac{M_T m_S}{R_g^2} \vec{e}_\rho \\ \implies R_g \Omega_g^2 &= G \frac{M_t}{R_g^2} \implies R_g = \left( \frac{G M_T}{\Omega_g^2} \right)^{1/3} \end{aligned}$$

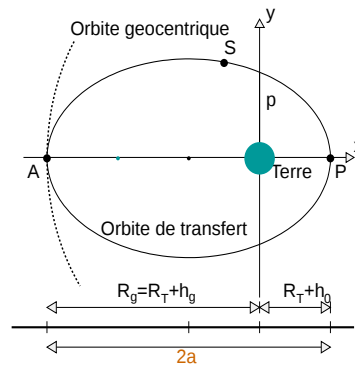
L'altitude est déduite comme suit  $h_g = R_g - R_T$ . Ce qui donne pour les applications numériques

$$R_g = \simeq 42253 \text{ km} \quad \text{et} \quad h_g \simeq 35853 \text{ km}.$$

- b) La vitesse du satellite est  $v_g = R_g \Omega_g$ . Son application numérique est  $v_g \simeq 3.1 \text{ km s}^{-1}$ .
- c) Le plan de l'orbite contient le centre de la Terre. Pour avoir comme axe de rotation l'axe des pôles, l'orbite doit être dans le plan de l'équateur.

## Corrigé de l'exercice 3 : orbite elliptique

Avant de placer un satellite sur une orbite géostationnaire, le lanceur des satellites, comme Ariane pour l'exemple, l'injecte à la périgée d'une orbite elliptique, dite orbite de transfert, à une altitude  $h_0 = 200\text{km}$  de la base de lancement et avec une vitesse, que l'on note  $v_0$ , telle que l'apogée  $A$  de l'orbite de transfert soit sur l'orbite géostationnaire. Au moment où le satellite se trouve en  $A$ , on actionne des moteurs qui réajuste sa vitesse et le transfèrent sur l'orbite géostationnaire, voir figure ci-contre.



**Les notations et les résultats de l'exercice précédents concernant une orbite géostationnaire sont utilisés sans démonstration.**

1. Comme le satellite est injecté à la périgée de l'orbite elliptique à la hauteur  $h_0$ , et que la Terre occupe l'un des foyers de l'ellipse, alors

$$2a = h_0 + R_T + R_g$$

Notez bien que  $\rho_{min} = R_T + h_0$  et  $\rho_{max} = R_g$ , et comme l'excentricité  $e$  de l'ellipse est donnée en fonction de ces deux quantités par

$$e = \frac{\rho_{max} - \rho_{min}}{\rho_{max} + \rho_{min}} = \frac{R_g - R_T - h_0}{R_g + R_T + h_0} = \frac{h_g - h_0}{h_g + 2R_T + h_0}.$$

Quant au paramètre  $p$  de l'ellipse, on l'obtient à partir de  $a$  et de  $e$  comme suit

$$p = a(1 - e^2).$$

Les applications numériques des différentes grandeurs calculées auparavant sont

$$a \simeq 24427\text{km} \quad e \simeq 0.73 \quad p \simeq 11417\text{km}.$$

2. Rappelons que la seule force à laquelle le satellite est soumis est l'attraction gravitationnelle dont la forme est  $\vec{F} = -\frac{GmM_T}{\rho^2} \vec{e}_\rho = -GM_T m u^2 \vec{e}_\rho$ <sup>1</sup> où  $u = 1/\rho$  et  $m$  la masse du satellite. Le PFD écrit avec la formule de Binet est

$$m\vec{\gamma}(S/\mathcal{R}) = -mC^2 \left( \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u \right) \vec{e}_\rho = -GM_T m u^2 \vec{e}_\rho \implies \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{GM_T}{C^2}.$$

La solution globale est la combinaison linéaire de la solution sans second membre  $u_{ssm} = A \cos(\varphi - \varphi_0)$  et d'une solution particulière  $u_p = \frac{GM_T}{C^2}$ , où  $A$  et  $\varphi_0$  sont des constantes d'intégration. On prend  $\varphi_0 = 0$ ,  $Ox$  confondu avec l'axe de l'ellipse, et la solution générale est

$$u = u_{ssm} + u_p = A \cos \varphi + \frac{GM_T}{C^2} = \frac{1}{\rho} \implies \rho = \frac{\frac{C^2}{GM_T}}{1 + A \frac{C^2}{GM_T} \cos \varphi} = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$$

ceci implique que

$$p = \frac{C^2}{GM_T} \implies C = \sqrt{pGM_T}.$$

3. Sachant que les vitesses sont perpendiculaires aux vecteurs positions respectivement à la périégée et à l'apogée implique que  $\rho_{min} v_0 = \rho_{max} v_1$ . De même le moment cinétique  $\sigma_0$  du satellite en ces deux points est le même puisque ce dernier est constant, avec  $\sigma_0 = mC = mv_0 \rho_{min} = mv_1 \rho_{max}$ , ce qui implique que

$$v_0 = \frac{C}{\rho_{min}} = \frac{\sqrt{pGM_T}}{R_T + h_0} \quad \text{et} \quad v_1 = \frac{C}{\rho_{max}} = \frac{\sqrt{pGM_T}}{R_T + h_g}.$$

Les applications numériques sont données par

$$v_0 = \frac{\sqrt{11.5 \times 10^6 \times 6 \times 10^{24} \times 6.7 \times 10^{11}}}{6400 \times 10^3 + 200 \times 10^3} = 10265 \text{ms}^{-1}$$

$$v_1 = \frac{\sqrt{11.5 \times 10^6 \times 6 \times 10^{24} \times 6.7 \times 10^{11}}}{6400 \times 10^3 + 35.853 \times 10^3} = 1603 \text{ms}^{-1}.$$

4. La différence de vitesse que doit communiquer le moteur d'apogée est  $v_g - v_1 \simeq 3100 - 1603 = 1397 \text{ms}^{-1}$ .
5. La troisième loi de Kepler permet de relier la période sidérale  $T_s$ , et qui dans notre cas la période sur l'orbite de transfert

$$T_s^2 = a^3 4\pi^2 / (GM_T).$$

Comme le temps que va passer le satellite sur l'orbite est la moitié de la période, puisqu'il parcourt la distance entre la périégée et l'apogée, alors le temps de transfert  $t_{tr}$  est

$$t_{tr} = \frac{T_s}{2} = a\pi \sqrt{\frac{a}{GM_T}} \simeq 5.2h.$$

---

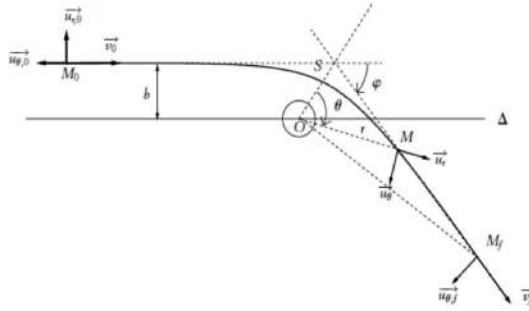
1. La constante universelle de gravitation peut être notée soit par  $G$  soit par  $K_G$ .

## Exercice 4 : Orbite hyperbolique

Corriger sur la figure les vecteurs de la base polaire à l'état initial  $\vec{u}_{\theta,0}$  et  $\vec{u}_{r,0}$ . En effet,  $\vec{u}_{\theta,0}$  est perpendiculaire à  $\vec{u}_{\Delta}$ . Noter bien aussi que les états initial et final sont très loin de  $O$ , ce qui permet de considérer dans ces cas que  $r \rightarrow \infty$  et donc l'énergie potentielle négligeable.

Une météorite  $M$  a, très loin de la Terre, une vitesse  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_{\Delta}$  portée par une droite située à la distance  $b$  de l'axe ( $\Delta$ ) du centre de la Terre  $O$ , voir figure ci-contre. On note par  $m$  la masse du météorite,  $M_T$  la masse de la Terre,  $R_T$  son rayon et  $G$  la constante de gravitation universelle. On travaille dans le référentiel géocentrique, supposé galiléen. La position de  $M$  est repérée par les coordonnées polaires  $(r, \theta)$ ,  $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$ . La trajectoire du météorite est une branche d'hyperbole de foyer  $O$ , le centre de la Terre.

Noter bien que l'on utilise les notations  $(\vec{u}_r, \vec{u}_{\theta})$  pour la base polaire et  $(r, \theta)$  les coordonnées correspondantes.



1. Etant donnée que la seule force à laquelle est soumise la météorite est l'attraction gravitationnelle et que cette dernière est centrale et son support passe par  $O$  alors son moment est nul ce qui implique que le moment cinétique  $\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})$  est constant tout au long du mouvement. Nous avons ainsi

$$\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R}) = mr^2\dot{\theta}\vec{k} = \text{Cst} = \overrightarrow{OM}_0 \wedge \vec{v}_0 = \|\overrightarrow{OM}_0\|mv_0\sin(\widehat{\overrightarrow{OM}_0, \vec{v}_0})\vec{k} = mv_0b\vec{k}$$

$$\text{où } \vec{k} = \vec{u}_r \wedge \vec{u}_{\theta} \text{ et } \sin(\widehat{\overrightarrow{OM}_0, \vec{v}_0}) = \sin\left[\pi - (\widehat{\overrightarrow{OM}_0, \vec{v}_0})\right] = b/\|\overrightarrow{OM}_0\|.$$

De plus l'attraction gravitationnelle est conservative et le potentiel dont elle dérive est égal à  $U(r) = -GM_Tm/r$ . Aussi, très loin de la Terre, l'énergie potentielle est négligeable,  $U(r) \rightarrow 0$ , et donc l'énergie mécanique est égale à l'énergie cinétique comme suit

$$E_m = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

2. Lorsque la météorite se trouve au sommet  $S$ , la vitesse  $\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{v} \perp \overrightarrow{OS}$ . Sachant que  $r_{\min} = \|\overrightarrow{OS}\|$  et  $\sigma_o = mr_{\min}v = mv_0b \implies v = v_0b/r_{\min}$ , cela

implique

$$\begin{aligned}
E_m &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_T m}{r_{min}} = \frac{1}{2}mv_0^2 \\
\Rightarrow \frac{v_0^2 b^2}{r_{min}^2} - 2 \frac{GM_T}{r_{min}} &= v_0^2 \\
\Rightarrow r_{min}^2 + 2 \frac{GM_T}{v_0^2} r_{min} - b^2 &= 0
\end{aligned}$$

dont la seule solution acceptable est la racine positive, étant donné que  $r_{min} > 0$  :

$$r_{min} = -\frac{GM_T}{v_0^2} + \sqrt{\left(\frac{GM_T}{v_0^2}\right)^2 + b^2}.$$

3. La météorite ne rencontre pas la Terre si  $r_{min} > R_T$ , ce qui implique que

$$\begin{aligned}
b &> \sqrt{\left(R_T + \frac{GM_T}{v_0^2}\right)^2 - \left(\frac{GM_T}{v_0^2}\right)^2} \\
\Rightarrow b &> R_T \sqrt{1 + 2 \frac{GM_T}{R_T v_0^2}}
\end{aligned}$$

et la valeur minimale de  $b$  est

$$b_{min} = R_T \sqrt{1 + 2 \frac{GM_T}{R_T v_0^2}}.$$

4. Pour calculer l'angle  $\varphi$ , on applique le PFD

$$\begin{aligned}
m \frac{d\vec{v}}{dt} &= -\frac{GM_T m}{r^2} \vec{u}_r \\
&= + \frac{GM_T m}{r^2 \dot{\theta}} \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} \Big|_{\mathcal{R}} \\
&= + \frac{GM_T m^2}{\sigma_o} \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = + \frac{GM_T m}{bv_0} \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} \Big|_{\mathcal{R}}
\end{aligned}$$

nous avosn utilisé le fait que  $\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} \Big|_{\mathcal{R}} = -\vec{u}_r$ . En intégrant cette équation entre l'état initial et l'état final, on obtient

$$\vec{v}_f - \vec{v}_0 = + \frac{GM_T}{bv_0} (\vec{u}_{\theta,f} - \vec{u}_{\theta,0}).$$

En projetant cet équation par  $\vec{u}_\Delta$ , sachant que  $\vec{v}_0 \cdot \vec{u}_\Delta = v_0$ ,  $\vec{u}_{\theta,0} \cdot \vec{u}_\Delta = 0$ ,  $\vec{u}_{r,f} \cdot \vec{u}_\Delta = \cos\varphi$  et  $\vec{u}_{\theta,f} \cdot \vec{u}_\Delta = \cos(\varphi + \pi/2) = -\sin\varphi$ , alors

$$v_f \cos\varphi - v_0 = - \frac{GM_T}{bv_0} \sin\varphi.$$



Comme l'énergie potentielle est négligeable aussi bien à l'état initial qu'à l'état final et comme l'énergie mécanique est conservée, alors

$$E_{m,0} = E_{m,f} \implies \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 \implies v_0 = v_f.$$

ce qui donne finalement

$$\begin{aligned} v_0(\cos\varphi - 1) &= -\frac{GM_T}{bv_0}\sin\varphi \\ \implies -2\sin\frac{\varphi}{2} &= -\frac{GM_T}{bv_0^2}2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} \\ \implies \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} &= +\frac{GM_T}{bv_0^2}. \end{aligned}$$

## Deuxième approche pour cette dernière question : voir le cours - Mouvement hyperbolique

Nous avons  $\cos\alpha = \frac{1}{e}$  où  $\alpha$  est l'angle que fait la direction asymptotique avec l'axe  $Fx$ . Si l'on compare avec la figure de l'exercice, nous avons  $2\alpha + \varphi = \pi \implies \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}$ . De même nous avons

$$e^2 = 1 + \frac{2pE_0}{GMm}$$

avec  $p = \sigma_0^2/(GMm) \implies p = mv_0^2b^2/(GM)$  et  $E_0 = 1/2mv_0^2 \implies e^2 = 1 + \frac{v_0^4b^2}{(GM)^2}$ . Or nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^2\alpha} &= e^2 \\ \implies \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 &= \frac{v_0^4b^2}{(GM)^2} \\ \implies \operatorname{tg}^2\alpha &= \frac{v_0^4b^2}{(GM)^2} \\ \implies \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2} &= \frac{v_0^4b^2}{(GM)^2} \implies \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = +\frac{v_0^2b}{GM} \end{aligned}$$

nous avons retenu la solution positive car  $0 < \varphi < \pi$  et qui n'est d'autre que le résultat obtenu.

Module de physique - Mécanique du Point Matériel  
Série N° 1  
Filières SMA/SMC/SMP

**Exercice 1 : Opérations sur les vecteurs**

On donne trois vecteurs  $\vec{A}(3, 2\sqrt{2}, \sqrt{3})$ ,  $\vec{B}(2, \sqrt{3}, \sqrt{2})$  et  $\vec{C}(1, 2, 2)$ .

1. Calculer les normes  $\|\vec{A}\|$ ,  $\|\vec{B}\|$  et  $\|\vec{C}\|$ . En déduire les vecteurs unitaires  $\vec{u}_A$ ,  $\vec{u}_B$  et  $\vec{u}_C$  des directions respectivement de  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  et  $\vec{C}$ .
2. Calculer  $\cos(\widehat{\vec{u}_A, \vec{u}_B})$ ,  $\cos(\widehat{\vec{u}_B, \vec{u}_C})$  et  $\cos(\widehat{\vec{u}_C, \vec{u}_A})$ , sachant que les angles sont compris entre 0 et  $\pi$ .
3. Calculer les composantes des vecteurs  $\vec{e}_1 = \vec{u}_B \wedge \vec{u}_C$ ,  $\vec{e}_2 = \vec{u}_C \wedge \vec{u}_A$  et  $\vec{e}_3 = \vec{u}_A \wedge \vec{u}_B$ .
4. En déduire  $\sin(\widehat{\vec{u}_A, \vec{u}_B})$ ,  $\sin(\widehat{\vec{u}_B, \vec{u}_C})$  et  $\sin(\widehat{\vec{u}_C, \vec{u}_A})$ . Vérifier ces résultats en utilisant la question 2.
5. Montrer que  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$ ,  $\vec{e}_3$  peuvent constituer une base. Cette base est-elle orthogonale, normée ?

**Exercice 2 : Différentielle et dérivée d'un vecteur unitaire**

Soit  $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère cartésien et considérons la base sphérique  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ .

1. Exprimer les vecteurs de la base sphérique dans la base cartésienne.
2. Calculer

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi}.$$

3. En déduire  $d\vec{e}_r$ ,  $d\vec{e}_\theta$  et  $d\vec{e}_\varphi$  dans la base sphérique.
4. Montrer que les différentielles des vecteurs de la base sphérique peuvent se mettre sous la forme

$$d\vec{e}_r = dt\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_r \quad d\vec{e}_\theta = dt\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\theta \quad d\vec{e}_\varphi = dt\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\varphi$$

en précisant l'expression du vecteur rotation  $\vec{\Omega}$  des vecteurs de la base sphérique par rapport à  $\mathcal{R}$ . Déduire les dérivées par rapport au temps des vecteurs de la base sphérique par rapport à  $\mathcal{R}$ .

5. On considère la base cylindrique  $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ . Quel est son vecteur rotation par rapport à  $\mathcal{R}$ ? En utilisant les résultats précédents, calculer la dérivée par rapport au temps des vecteurs de la base cylindrique par rapport à  $\mathcal{R}$ .
6. Considérons un vecteur  $\vec{V} = V_r \vec{e}_r + V_\theta \vec{e}_\theta + V_\varphi \vec{e}_\varphi$ . En utilisant les résultats précédents, calculer la dérivée par rapport au temps de  $\vec{V}$  par rapport à  $\mathcal{R}$ .

### Exercice 3 : Déplacement élémentaire

On se propose de traiter dans cet exercice le déplacement élémentaire dans les trois systèmes de coordonnées, cartésiennes, cylindriques et sphériques et ce en utilisant les résultats **de l'exercice 2**.

Considérons un repère cartésien  $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Soient  $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$  et  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$  respectivement les bases cylindrique et sphérique. Soit  $M$  un point repéré par  $\vec{OM}$  par rapport à  $\mathcal{R}$ . On considère un déplacement infinitésimal de  $M$  en  $M'$  tel que  $M'$  est très proche de  $M$ . On note alors le déplacement élémentaire par  $\vec{OM}' - \vec{OM} = d\vec{MM}' = d\vec{OM}$ .

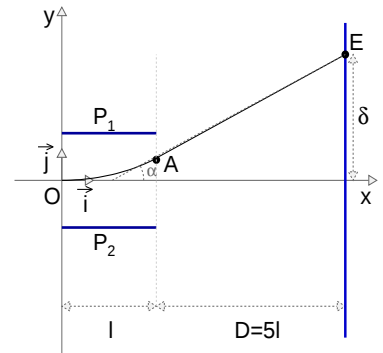
1. Dans le repère cartésien,  $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ . Calculer le déplacement  $d\vec{OM}$  par rapport à  $\mathcal{R}$  dans la base cartésienne.
2. Rappeler le vecteur rotation de la base cylindrique par rapport à  $\mathcal{R}$ . Partant de  $\vec{OM} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{k}$ , calculer le déplacement  $d\vec{OM}$  par rapport à  $\mathcal{R}$  dans la base cylindrique.
3. Rappeler le vecteur rotation de la base sphérique par rapport à  $\mathcal{R}$ . Dans la base sphérique  $\vec{OM} = r\vec{e}_r$ , calculer le déplacement  $d\vec{OM}$  par rapport à  $\mathcal{R}$  et ce dans cette base.

### Exercice 4 : Tube cathodique

On étudie le mouvement des électrons dans le tube cathodique d'un oscilloscope. Les électrons arrivent en  $O$  avec une vitesse  $\vec{v}_0 = v_0\vec{i}$  et traversent les plaques de déviation  $P_1$  et  $P_2$  de longueur  $l$ . Les électrons sont soumis entre les plaques de déviation à une accélération uniforme  $\vec{\gamma}_0 = \gamma_0\vec{j}$  et sont déviés, figure ci-dessous. L'écran est à la distance  $D = 5l$  de la sortie des plaques. On exprime dans le reste de l'exercice les grandeurs vectorielles dans la base cartésienne.

la vitesse de la particule à la sortie des plaques est  $\vec{v}_A$  et fait un angle  $\alpha$  avec  $\vec{i}$ . L'accélération des électrons entre les points  $A$  et  $E$  est nulle.

1. Etablir les équations horaires du mouvement des électrons entre les plaques de déviation,  $x(t)$  et  $y(t)$ . En déduire l'équation de la trajectoire  $y = f(x)$ .
2. Calculer la vitesse des électrons au point  $A$ ,  $\vec{v}_A$ , en fonction de  $v_0, l$  et  $\gamma_0$ . En déduire l'angle  $\alpha = (\vec{i}, \vec{v}_A)$ .
3. Quelle est la nature de la trajectoire des électrons entre  $A$  et  $E$ ? En déduire les équations horaires  $x(t)$  et  $y(t)$ . Déterminer la déviation  $\delta$  en fonction de  $v_0, l$  et  $\gamma_0$ .



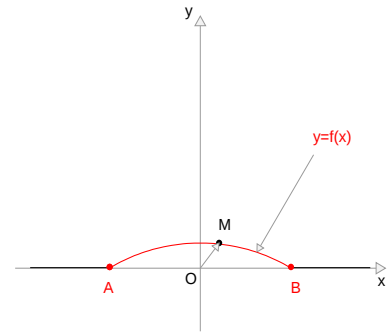
## Exercice 5

Un véhicule, que l'on peut considérer comme un point matériel  $M$ , se déplace par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}(O, xyz)$  avec un mouvement de translation uniforme de vitesse  $\vec{V}(M/\mathcal{R})$  telle que  $|\vec{V}(M/\mathcal{R})| = v$ . Le véhicule roule sur une bosse dont le profil peut être représenté par  $y = f(x)$ . On s'intéresse au segment de la route  $[A, B]$ .

1. Calculer la vitesse  $\vec{V}(M/\mathcal{R})$  en fonction de  $\dot{x}$  et de la dérivée première  $f'(x) = df(x)/dx$  par rapport à  $x$ .
2. Calculer l'accélération  $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$ . En déduire que la composante de l'accélération selon  $Oy$  peut se mettre sous la forme

$$\gamma_y(M/\mathcal{R}) = \frac{v^2 f''(x)}{(f'^2 + 1)^2}$$

$f''(x)$  étant la dérivée seconde de  $f(x)$  par rapport à  $x$ .



Module de physique - Mécanique du Point Matériel  
 Corrigé de la série N° 1  
 Filières SMA/SMC/SMP

## Corrigé de l'exercice 1 : Opérations sur les vecteurs

1. Soit un vecteur  $\vec{V} = (v_1, v_2, v_3)$ . On sait que la norme est donnée par  $\|\vec{V}\| = \sqrt{\sum_{i=1,3} v_i^2}$ . En appliquant ce résultat aux trois vecteurs  $\vec{A}(3, 2, \sqrt{3})$ ,  $\vec{B}(2, \sqrt{3}, \sqrt{2})$  et  $\vec{C}(1, 2, 2)$ , on obtient

$$\begin{aligned}\|\vec{A}\| &= \sqrt{3^2 + 2^2 + \sqrt{3}^2} = 4 \\ \|\vec{B}\| &= \sqrt{2^2 + \sqrt{3}^2 + \sqrt{2}^2} = 3 \\ \|\vec{C}\| &= \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3\end{aligned}$$

On sait que le vecteur unitaire  $\vec{u}_V$  de la direction du vecteur  $\vec{V}$ , est définie par  $\vec{u}_V = \vec{V}/\|\vec{V}\|$ . De la même manière, en appliquant ce résultat, on obtient

$$\begin{aligned}\vec{u}_A &= \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \\ \vec{u}_B &= \left(\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right) \\ \vec{u}_C &= \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)\end{aligned}$$

2. Pour déterminer les cosinus des angles entre les trois vecteurs pris deux à deux, nous utilisons la définition du produit scalaire suivante  $\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \cos(\widehat{\vec{A}, \vec{B}})$ , ce qui donne

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{\vec{A}, \vec{B}}) &= \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{A}\| \|\vec{B}\|} \\ &= \frac{3 \times 2 + 2 \times \sqrt{3} + \sqrt{3} \times \sqrt{2}}{4 \times 3} \\ &\simeq 0.993\end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{\vec{B}, \vec{C}}) &= \frac{\vec{B} \cdot \vec{C}}{\|\vec{B}\| \|\vec{C}\|} \\ &= \frac{2 \times 1 + \sqrt{3} \times 2 + \sqrt{2} \times 2}{3 \times 3} \\ &\simeq 0.921\end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{\vec{C}, \vec{A}}) &= \frac{\vec{C} \cdot \vec{A}}{\|\vec{C}\| \|\vec{A}\|} \\ &= \frac{1 \times 3 + 2 \times 2 + 2 \times \sqrt{3}}{3 \times 4} \\ &\simeq 0.872\end{aligned}$$

3. On sait que les composantes du vecteur produit vectoriel entre  $\vec{u}_B$  et  $\vec{u}_C$  sont données par

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= \vec{u}_B \wedge \vec{u}_C \\ &= \left( \left| \begin{array}{cc} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \right|, - \left| \begin{array}{cc} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \right| \right) \\ &= \left( \frac{2(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{9}, \frac{\sqrt{2} - 4}{9}, \frac{4 - \sqrt{3}}{9} \right)\end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned}\vec{e}_2 &= \vec{u}_C \wedge \vec{u}_A \\ &= \left( \left| \begin{array}{cc} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{array} \right|, - \left| \begin{array}{cc} \frac{1}{3} & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} \frac{1}{3} & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{array} \right| \right) \\ &= \left( \frac{2(\sqrt{3} - 2)}{12}, \frac{6 - \sqrt{3}}{12}, -\frac{1}{3} \right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\vec{e}_3 &= \vec{u}_A \wedge \vec{u}_B \\ &= \left( \left| \begin{array}{cc} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{3} \end{array} \right|, - \left| \begin{array}{cc} \frac{3}{4} & \frac{2}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{3} \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} \frac{3}{4} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{array} \right| \right) \\ &= \left( \frac{2\sqrt{2} - 3}{12}, \frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{12}, \frac{4\sqrt{3} - 3}{12} \right)\end{aligned}$$

4. Calculons  $\sin(\widehat{\vec{u}_A, \vec{u}_B})$ . On a

$$\begin{aligned}\|\vec{e}_3\| &= \|\vec{u}_A\| \|\vec{u}_B\| \sin(\widehat{\vec{u}_A, \vec{u}_B}) \implies \sin(\widehat{\vec{u}_A, \vec{u}_B}) = \|\vec{e}_3\| \\ &\simeq 0.1198\end{aligned}$$

puisque  $\vec{u}_A$  et  $\vec{u}_B$  sont unitaires. On utilise la même démarche pour les autres angles :

$$\sin(\widehat{\vec{u}_B, \vec{u}_C}) = \|\vec{e}_1\| = 0.3886$$

et

$$\sin(\widehat{\vec{u}_C, \vec{u}_A}) = \|\vec{e}_2\| = 0.4895$$

Pour vérifier ces derniers résultats, on utilise les cosinus de ces mêmes angles déjà calculés auparavant et on trouve

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{1 - \cos^2(\widehat{\vec{u}_A, \vec{u}_B})} = 0.1181 \simeq \|\vec{e}_3\| \\ \sqrt{1 - \cos^2(\widehat{\vec{u}_B, \vec{u}_C})} = 0.3896 \simeq \|\vec{e}_1\| \\ \sqrt{1 - \cos^2(\widehat{\vec{u}_C, \vec{u}_A})} = 0.4895 \simeq \|\vec{e}_2\| \end{array} \right.$$

ce qui vérifie bien que les angles calculés dans cette questions sont les mêmes que ceux calculés dans la question 2.

5. Pour qu'une famille de vecteurs constitue une base, il suffit

— que le cardinal de la famille, c'est à dire le nombre de vecteurs de la famille, soit égal à la dimension de l'espace vectoriel en question, et qui est dans notre cas 3. Ce qui est vérifié pour  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  ;

- et que la famille soit une famille libre, c'est à dire que tout vecteur peut être écrit comme combinaison linéaire de ces trois vecteurs. Pour démontrer cette propriété, il suffit que les trois vecteurs ne soient pas coplanaires et donc leur produit mixte soit différent de zéro. Calculons alors le produit mixte

$$\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3) = \begin{vmatrix} \frac{2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{9} & \frac{2(\sqrt{3}-2)}{12} & \frac{2\sqrt{2}-3}{12} \\ \frac{\sqrt{2}-4}{9} & \frac{6-\sqrt{3}}{12} & \frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{12} \\ \frac{4-\sqrt{3}}{9} & \frac{1}{3} & \frac{4\sqrt{3}-3}{12} \end{vmatrix} \simeq 3.4 \cdot 10^{-4}$$

et qui est donc différent de 0. D'où les trois vecteurs forment une famille libre.

On en déduit que  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  forment une base.

6. Elle n'est pas orthogonale car les produits scalaires entre ces vecteurs pris deux à deux ne sont pas nuls. Elle n'est pas non plus normée car les vecteurs de sa base ne n'ont pas une norme égale à l'unité.

## Corrigé de l'exercice 2 : Différentielle et dérivée d'un vecteur unitaire

Soit  $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère cartésien et considérons la base sphérique  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ .

1. Exprimons les vecteurs de la base sphérique dans la base cartésienne :

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \cos\theta\vec{k} + \sin\theta\vec{e}_\rho \\ &= \cos\theta\vec{k} + \sin\theta(\cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j}) \\ &= \cos\varphi\sin\theta\vec{i} + \sin\varphi\sin\theta\vec{j} + \cos\theta\vec{k}. \end{aligned}$$

nous sommes passés par le vecteur  $\vec{e}_\rho$  de la base cylindrique.

De même, pour  $\vec{e}_\theta$ , nous avons

$$\begin{aligned} \vec{e}_\theta &= -\sin\theta\vec{k} + \cos\theta\vec{e}_\rho \\ &= -\sin\theta\vec{k} + \cos\theta(\cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j}) \\ &= \cos\varphi\cos\theta\vec{i} + \sin\varphi\cos\theta\vec{j} - \sin\theta\vec{k}. \end{aligned}$$

et finalement

$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}$$

2. Calculons les dérivées partielles suivantes sachant que les vecteurs de la base cartésienne sont fixes :

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \cos\varphi\cos\theta\vec{i} + \sin\varphi\cos\theta\vec{j} - \sin\theta\vec{k};$$

et

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} = -\sin\varphi\sin\theta\vec{i} + \cos\varphi\sin\theta\vec{j};$$

et

$$\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\cos\varphi\sin\theta\vec{i} - \sin\varphi\sin\theta\vec{j} - \cos\theta\vec{k};$$

et

$$\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \varphi} = -\sin\varphi\cos\theta\vec{i} + \cos\varphi\cos\theta\vec{j};$$

et

$$\frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \theta} = 0$$

et

$$\frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\cos\varphi \vec{i} - \sin\varphi \vec{j}.$$

3. Pour établir la différentielle de chacun des vecteurs de la base, on a

$$\begin{aligned} d\vec{e}_r &= \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} d\varphi \\ &= (\cos\varphi \cos\theta \vec{i} + \sin\varphi \cos\theta \vec{j} - \sin\theta \vec{k}) d\theta + (-\sin\varphi \vec{i} + \cos\varphi \vec{j}) \sin\theta d\varphi \\ &= d\theta \vec{e}_\theta + \sin\theta d\varphi \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

De la même manière, on établit la différentielle de  $\vec{e}_\theta$  comme suit

$$\begin{aligned} d\vec{e}_\theta &= \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \varphi} d\varphi \\ &= (-\cos\varphi \sin\theta \vec{i} - \sin\varphi \sin\theta \vec{j} - \cos\theta \vec{k}) d\theta + (-\sin\varphi \cos\theta \vec{i} + \cos\varphi \cos\theta \vec{j}) d\varphi \\ &= -d\theta \vec{e}_r + \cos\theta d\varphi \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

et finalement

$$\begin{aligned} d\vec{e}_\varphi &= \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi \\ &= d\varphi (-\cos\varphi \vec{i} - \sin\varphi \vec{j}) \\ &= -d\varphi \vec{e}_\rho = -d\varphi (\sin\theta \vec{e}_r + \cos\theta \vec{e}_\theta). \end{aligned}$$

4. Pour cette question, il suffit de faire apparaître les différentielles des vecteurs de la base sphérique sous la forme demandée. On a  $\vec{k} = \cos\theta \vec{e}_r - \sin\theta \vec{e}_\theta$ , ce qui donne  $\vec{k} \wedge \vec{e}_r = \sin\theta \vec{e}_\varphi$ ,  $\vec{k} \wedge \vec{e}_\theta = \cos\theta \vec{e}_\varphi$  et  $\vec{e}_\theta = \vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_r$ , ainsi on peut écrire

$$\begin{aligned} d\vec{e}_r &= d\theta \vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_r + d\varphi \vec{k} \wedge \vec{e}_r \\ &= (dt \dot{\theta} \vec{e}_\varphi + dt \dot{\varphi} \vec{k}) \wedge \vec{e}_r \\ &= dt \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_r \end{aligned}$$

avec  $\vec{\Omega} = \dot{\theta} \vec{e}_\varphi + \dot{\varphi} \vec{k}$ .

De même, on a

$$\begin{aligned} d\vec{e}_\theta &= -d\theta \vec{e}_r + \cos\theta d\varphi \vec{e}_\varphi \\ &= d\theta \vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_\theta + d\varphi \vec{k} \wedge \vec{e}_\theta \\ &= dt \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\theta. \end{aligned}$$

Finalement, reprenons la différentielle de  $\vec{e}_\varphi$  :

$$\begin{aligned} d\vec{e}_\varphi &= -dt \dot{\varphi} (\sin\theta \vec{e}_r + \cos\theta \vec{e}_\theta) \\ &= -dt \dot{\varphi} (\sin\theta \vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_\varphi - \cos\theta \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\varphi) \\ &= -dt \dot{\varphi} (\sin\theta \vec{e}_\theta - \cos\theta \vec{e}_r) \wedge \vec{e}_\varphi \\ &= dt \dot{\varphi} \vec{k} \wedge \vec{e}_\varphi \\ &= dt \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

Les dérivées par rapport au temps s'obtiennent facilement en divisant par  $dt$  :

$$\left. \frac{d\vec{e}_r}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_r \quad \left. \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\theta \quad \left. \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\varphi.$$



5. Considérons cette fois-ci la base cylindrique. Le seul angle qui varie est  $\varphi$ , d'où le vecteur rotation de la base cylindrique par rapport à la base cartésienne est  $\vec{\Omega} = \dot{\varphi}\vec{k}$ . En appliquant les résultats précédents, on obtient

$$\begin{aligned}\left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_{\mathcal{R}} &= \dot{\varphi}\vec{k} \wedge \vec{e}_\rho = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \\ \left.\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}\right|_{\mathcal{R}} &= \dot{\varphi}\vec{k} \wedge \vec{e}_\varphi = -\dot{\varphi}\vec{e}_\rho \\ \left.\frac{d\vec{k}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} &= 0\end{aligned}$$

6. Soit  $\vec{V} = V_r\vec{e}_r + V_\theta\vec{e}_\theta + V_\varphi\vec{e}_\varphi$ . Sa dérivée par rapport au temps est

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{V}}{dt} &= \frac{dV_r}{dt}\vec{e}_r + V_r\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \frac{dV_\theta}{dt}\vec{e}_\theta + V_\theta\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} + \frac{dV_\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi + V_\varphi\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} \\ &= \frac{dV_r}{dt}\vec{e}_r + \frac{dV_\theta}{dt}\vec{e}_\theta + \frac{dV_\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi + V_r\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_r + V_\theta\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\theta + V_\varphi\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\varphi \\ &= \frac{dV_r}{dt}\vec{e}_r + \frac{dV_\theta}{dt}\vec{e}_\theta + \frac{dV_\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi + \vec{\Omega} \wedge (V_r\vec{e}_r + V_\theta\vec{e}_\theta + V_\varphi\vec{e}_\varphi) \\ &= \frac{dV_r}{dt}\vec{e}_r + \frac{dV_\theta}{dt}\vec{e}_\theta + \frac{dV_\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi + \vec{\Omega} \wedge \vec{V}.\end{aligned}$$

qui reste une relation générale.

## Corrigé de l'exercice 3 : Déplacement élémentaire

Considérons un repère cartésien  $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Soient  $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$  et  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$  respectivement les bases cylindrique et sphérique. Soit  $M$  un point repéré par  $\vec{OM}$  par rapport à  $\mathcal{R}$ . On considère un déplacement infinitésimal de  $M$  en  $M'$  tel que  $M'$  est très proche de  $M$ . On note alors le déplacement élémentaire par  $\vec{OM}' - \vec{OM} = d\vec{MM}' = d\vec{OM}$

1. La base cartésienne est fixe et donc la dérivée de ces vecteurs par rapport au temps dans  $\mathcal{R}$  est nulle. D'où, le déplacement élémentaire dans cette base est

$$d\vec{OM} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}.$$

2. Le vecteur rotation de la base cylindrique dans  $\mathcal{R}$  est  $\vec{\Omega} = \dot{\varphi}\vec{k}$ . Ceci peut être démontré facilement en explicitant la base cylindrique dans la base cartésienne.

Le déplacement élémentaire dans cette base est

$$\begin{aligned}d\vec{OM} &= d(\rho\vec{e}_\rho + z\vec{k}) = d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\vec{e}_\rho + dz\vec{k} \\ &= d\rho\vec{e}_\rho + \rho dt\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\rho + dz\vec{k} \\ &= d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\varphi\vec{k} \wedge \vec{e}_\rho + dz\vec{k} = d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\varphi\vec{e}_\varphi + dz\vec{k}\end{aligned}$$

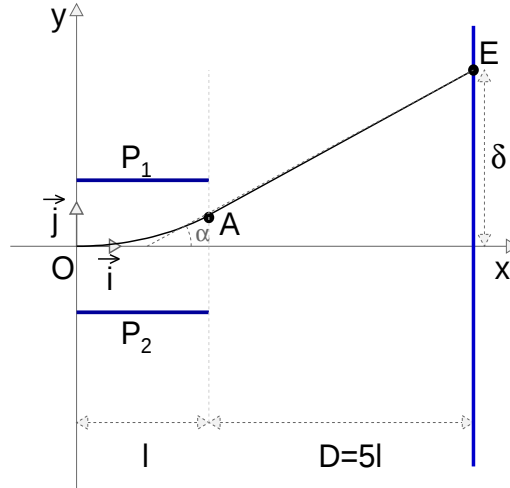
3. Pour ce qui est de la base sphérique, le vecteur rotation est  $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{e}_\varphi + \dot{\varphi}\vec{k} = \dot{\theta}\vec{e}_\varphi + \dot{\varphi}(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta)$ . Ainsi pour le déplacement élémentaire dans cette base, on trouve

$$\begin{aligned}d\vec{OM} &= d(r\vec{e}_r) = dr\vec{e}_r + r d\vec{e}_r \\ &= dr\vec{e}_r + r dt\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_r \\ &= dr\vec{e}_r + r(d\theta\vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_r + d\varphi[\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta] \wedge \vec{e}_r) \\ &= dr\vec{e}_r + r(d\theta\vec{e}_\theta + d\varphi\vec{e}_\varphi) \\ &= dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + r d\varphi\sin\theta\vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

## Exercice 4 : Tube cathodique

Nous étudions dans cet exercice le mouvement des électrons dans un tube cathodique d'un oscilloscope, voir figure ci-dessous. Les électrons partent du point  $O$  avec la vitesse  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{i}$ , ce qui implique que les composantes de la vitesse à l'instant initial selon  $Ox$  et  $Oy$  sont respectivement  $v_{0x} = v_0$  et  $v_{0y} = 0$ . La vitesse à un instant quelconque  $t$  sera notée  $\vec{v}(t) = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$  où  $v_x = d\gamma_x/dt$  et  $v_y = d\gamma_y/dt$ .

De même, l'accélération des électrons entre les deux plaques est  $\vec{\gamma} = \gamma_0 \vec{i} = \gamma_x \vec{i} + \gamma_y \vec{j}$ , ce qui implique que l'accélération selon  $Oy$  est  $\gamma_y = \gamma_0$  alors que selon  $Ox$ , elle est nulle  $\gamma_x = 0$ .



1. Pour établir les équations horaires  $x(t)$  et  $y(t)$  du mouvement des électrons entre les plaques, nous partons de l'expression des composantes de l'accélération

$$\frac{dv_x}{dt} = \gamma_x = 0 \implies \int dv_x = 0 \implies v_x = \text{Cte} \implies v_x = v_{0x}.$$

De cette dernière relation, on déduit l'équation horaire

$$\frac{dx}{dt} = v_x = v_{0x} \implies \int dx = v_{0x} \implies x(t) = v_{0x}t + \text{Cte}$$

la constante est déterminée à partir des conditions initiales,  $x(t=0) = x_0 = 0$ , ce qui implique  $x(t) = v_{0x}t$ .

On procède de la même manière pour l'équation horaire  $y(t)$

$$\frac{dv_y}{dt} = \gamma_y = \gamma_0 \implies \int dv_y = \gamma_0 \implies v_y = \gamma_0 t + \text{Cte}$$

or  $v_y(t=0) = v_{0y} = 0$  ce qui implique que la constante est nulle et  $v_y = \gamma_0 t$ . Pour  $y(t)$ , sachant que  $y(t=0) = 0$ ,

$$\frac{dy}{dt} = v_y = \gamma_0 t \implies \int dy = \gamma_0 \int t dt \implies y(t) = \frac{1}{2} \gamma_0 t^2.$$

On en conclut que les équations horaires du mouvement des électrons sont

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = \frac{1}{2} \gamma_0 t^2 \end{cases}$$

Pour déduire l'équation de la trajectoire, il suffit de substituer  $t$  dans l'expression de  $y$  par son expression en fonction de  $x$ , sachant que  $t = x/v_0$

$$y = \frac{1}{2} \gamma_0 t^2 = \frac{1}{2} \frac{\gamma_0}{v_0^2} x^2$$

qui est l'équation d'une parabole de sommet  $O$ .

2. Calculons la vitesse des électrons au point  $A$ , situé à la sortie des plaques,  $x_A = l$

$$\begin{aligned}\vec{v}_A &= v_{xA}\vec{i} + v_{yA}\vec{j} \\ &= v_0\vec{i} + \gamma_0 t_A \vec{j}\end{aligned}$$

où  $t_A$  est le temps mis par les électrons pour atteindre le point  $A$ ,  $t_A = l/v_0$  ce qui donne

$$\vec{v}_A = v_0\vec{i} + \frac{\gamma_0 l}{v_0}\vec{j}$$

Pour déduire  $\alpha$ , il suffit de projeter  $\vec{v}_A$  sur l'axe  $Ox$ , d'une part, et d'utiliser la définition du produit scalaire de  $\vec{v}_A$  par  $\vec{i}$ , d'autre part

$$\begin{aligned}\vec{v}_A \cdot \vec{i} &= v_0 \quad (\text{projection sur } \vec{i}) \\ &= |\vec{v}_A| \cos \alpha \quad (\text{définition de } \vec{v}_A \cdot \vec{i}) \\ \implies \cos \alpha &= \frac{v_0}{|\vec{v}_A|}\end{aligned}$$

or

$$|\vec{v}_A| = \sqrt{v_0^2 + \frac{\gamma_0^2 l^2}{v_0^2}} = v_0 \sqrt{1 + \frac{\gamma_0^2 l^2}{v_0^4}}$$

ce qui donne

$$\alpha = \arccos \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\gamma_0^2 l^2}{v_0^4}}} \right)$$

3. L'accélération des électrons entre les points  $A$  et  $E$  est nulle ce qui implique que le mouvement est rectiligne uniforme. Dans la suite, on considère les équations horaires entre les deux points  $A$  et  $E$  sans l'expliciter. En effet

$$\frac{dv_x}{dx} = 0 \implies v_x(t) = K$$

or  $v_x(t_A) = \vec{v}_A \cdot \vec{i} = v_0$  ce qui implique que  $v_x(t) = v_0$ . De même

$$\frac{dx}{dt} = v_x = v_0 \implies x(t) = v_0 t + K$$

et on détermine la constante sachant qu'à  $t = t_A$  on a  $x = x_A = l$ , ce qui donne  $x(t = t_A) = l = v_0 t_A + K \implies K = l - v_0 t_A$  or  $t_A = l/v_0$  ce qui implique  $K = l - v_0 \frac{l}{v_0} = 0$  et

$$x(t) = v_0 t$$

lequel résultat est prévu car le mouvement selon  $Ox$  est uniforme entre  $O$  et  $E$ .

On procède de la même manière pour l'équation horaire  $y(t)$  :

$$\frac{dv_y}{dy} = 0 \implies v_y(t) = K$$

or  $v_y(t_A) = \vec{v}_A \cdot \vec{j} = \frac{\gamma_0 l}{v_0}$  ce qui implique que

$v_y(t) = \frac{\gamma_0 l}{v_0}$ . De même

$$\frac{dy}{dt} = v_y = \frac{\gamma_0 l}{v_0} \implies y(t) = \frac{\gamma_0 l}{v_0} t + K$$

et on détermine la constante sachant qu'à  $t = t_A$  on a  $y = y_A = \frac{1}{2}\gamma_0 t_A^2 = \frac{1}{2}\gamma_0 \frac{l^2}{v_0^2}$ . Ainsi

$$\begin{aligned} y(t = t_A) &= y_A = \frac{\gamma_0 l}{v_0} t_A + K \\ \Rightarrow K &= y_A - \frac{\gamma_0 l}{v_0} t_A = \frac{1}{2}\gamma_0 \frac{l^2}{v_0^2} - \frac{\gamma_0 l}{v_0} \frac{l}{v_0} = -\frac{1}{2}\gamma_0 \frac{l^2}{v_0^2} \end{aligned}$$

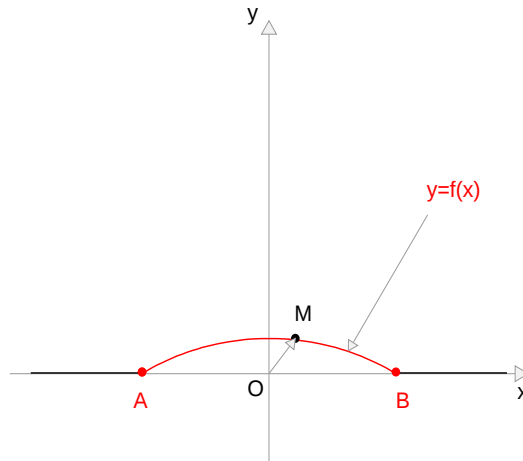
ainsi l'équation horaire  $y(t)$  s'obtient comme suit

$$y(t) = \frac{\gamma_0 l}{v_0} t - \frac{1}{2}\gamma_0 \frac{l^2}{v_0^2} = \frac{\gamma_0 l}{v_0} \left( t - \frac{1}{2} \frac{l}{v_0} \right)$$

Pour déterminer la déviation  $\delta$ , il suffit de reprendre l'équation horaire  $y(t)$  à l'instant  $t = t_E = \frac{l+D}{v_0} = \frac{6l}{v_0}$  :

$$\delta = y(t = t_E) = \frac{\gamma_0 l}{v_0} \left( \frac{6l}{v_0} - \frac{1}{2} \frac{l}{v_0} \right) = \frac{11}{2} \frac{\gamma_0 l^2}{v_0^2}.$$

## Corrigé de l'exercice 5



Nous nous intéressons au segment  $[A, B]$  de la route dont le profil est décrit par  $y = f(x)$ , comme indiqué dans la figure ci-dessus.

La position de  $M$  est repérée par  $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ , étant donné que le mouvement a lieu dans le plan  $(Oxy)$ .

1. La vitesse du point  $M$  s'exprime dans le repère cartésien comme suit

$$\begin{aligned} \vec{V}(M/\mathcal{R}) &= \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} \\ &= \dot{x}\vec{i} + \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}\vec{j} \\ &= \dot{x}(\vec{i} + f'(x)\vec{j}). \end{aligned}$$

2. Calculons l'accélération  $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$  :

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) &= \ddot{x}(\vec{i} + f'(x)\vec{j}) + \dot{x}\frac{d}{dt}f'(x)\vec{j} \\ &= \ddot{x}(\vec{i} + f'(x)\vec{j}) + \dot{x}\dot{x}\frac{d}{dx}f'(x)\vec{j} \\ &= \ddot{x}\vec{i} + (\ddot{x}f'(x) + \dot{x}^2 f''(x))\vec{j} \end{aligned}$$

ce qui donne pour la composante de l'accélération selon  $Oy$

$$\gamma_y(M/\mathcal{R}) = \ddot{x}f'(x) + \dot{x}^2 f''(x).$$

Pour réexprimer  $\gamma_y(M/\mathcal{R})$  comme demandé, il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} v^2 = \dot{x}^2 (1 + f'^2(x)) &\implies \dot{x}^2 = \frac{v^2}{1 + f'^2(x)} \\ \implies \frac{d}{dt} \dot{x}^2 &= \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{1 + f'^2(x)} \right) \\ \implies 2\dot{x}\ddot{x} &= \dot{x} \frac{d}{dx} \left( \frac{v^2}{1 + f'^2(x)} \right) \\ \implies \ddot{x} &= \frac{-v^2 f'(x) f''(x)}{(1 + f'^2(x))^2} \end{aligned}$$

En remplaçant  $\dot{x}$  et  $\ddot{x}$  par leurs expressions dans celle de  $\gamma_y(M/\mathcal{R})$ , on obtient

$$\begin{aligned} \gamma_y(M/\mathcal{R}) &= \frac{-v^2 f'^2(x) f''(x)}{(1 + f'^2(x))^2} + \frac{v^2 f''(x)}{1 + f'^2(x)} \\ &= \frac{v^2 f''(x)}{(1 + f'^2(x))^2} \end{aligned}$$

d'où l'expression recherchée.

## Exercice 1 : Energie mécanique et trajectoire

Considérons un point matériel  $M$  de masse  $m$  soumis à l'interaction gravitationnelle par une masse ponctuelle  $M_s$  située au point  $O$ . Soit le référentiel galiléen  $\mathcal{R}(O, XYZ)$ .

1. Montrer que le moment cinétique est conservé. En déduire que le mouvement est plan.

On choisit  $\mathcal{R}$  tel que le mouvement de  $M$  soit dans le plan  $(OXY)$ . On utilise dans la suite de l'exercice les coordonnées polaires  $(\rho, \varphi)$ .

2. Calculer l'énergie cinétique  $E_c$  et l'énergie potentielle  $E_p$  de  $M$  en prenant  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} E_p(\rho) = 0$ . En déduire que l'énergie mécanique de  $M$  est donnée par

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{mC^2}{2\rho^2} + \frac{K}{\rho}$$

en explicitant l'expression de  $K$  et de la constante des aires  $C$ .

3. On pose  $\rho = \frac{1}{u}$ . Retrouver l'expression de  $E_m = f(u, \frac{du}{d\varphi})$ .
4. En utilisant le théorème de l'énergie mécanique, montrer que l'équation du mouvement en  $u(\varphi)$  est

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{K}{mC^2}$$

5. Résoudre l'équation du mouvement en  $u(\varphi)$ . En déduire que l'équation du mouvement en  $\rho(\varphi)$  est de la forme

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)}.$$

Quelle est la nature de la trajectoire en précisant les expressions de  $p$  et de  $e$  ?

6. En utilisant l'expression de  $E_m$  en fonction de  $u(\varphi)$ , montrer que

$$E_m = \frac{GM_s m}{2p} (e^2 - 1).$$

Discuter la nature de la trajectoire en fonction de  $e$  et déduire le signe de  $E_m$  pour chaque type de trajectoire.

7. En utilisant la conservation de l'énergie mécanique, déduire que l'excentricité dans ce cas est donnée par

$$e = \sqrt{1 + \frac{\rho V_0^2}{GM_s} - \frac{2p}{\rho_0}}$$

où  $\rho(t=0) = \rho_0$  et  $|\vec{V}(M/\mathcal{R})|(t=0) = V_0$ .

## Exercice 2 : Cas d'une trajectoire circulaire

On reprend les résultats de l'exercice précédent.

1. A quelle condition la trajectoire de  $M$  est circulaire ? On suppose que cette condition est vérifiée dans la suite de l'exercice et on note le rayon de la trajectoire par  $\rho = R$ .
2. En utilisant le PFD, montrer que le mouvement circulaire est uniforme. En déduire que l'expression du module de la vitesse de  $M$  en fonction de  $R$  est donnée par

$$|\vec{V}(M/\mathcal{R})| = \sqrt{\frac{GM_s}{R}}.$$

3. Montrer que la période de révolution  $T$  de  $M$  est donnée par

$$T^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{GM_s}.$$

Commenter ce résultat.

4. Montrer que l'énergie mécanique  $E_m$  dans ce cas vérifie les relations suivantes

$$E_m = -E_c = \frac{1}{2}E_p$$

où  $E_c$  et  $E_p$  sont respectivement les énergies cinétique et potentielle.

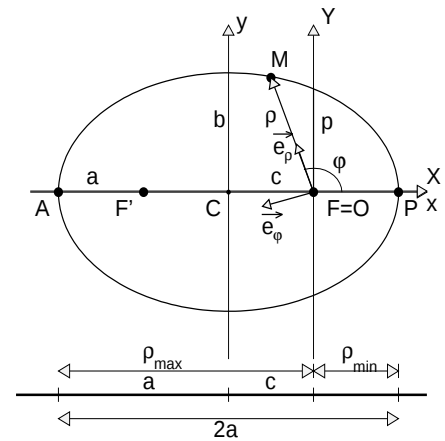
## Exercice 3 : Cas d'une trajectoire elliptique

On utilise les résultats de l'exercice 1.

1. A quelle condition le mouvement de  $M$  est elliptique ? On suppose que c'est le cas pour le reste de l'exercice avec  $\varphi_0 = 0$ .
2. La figure ci-contre, représente l'ellipse dans le référentiel  $\mathcal{R}$  où le foyer  $F$  de l'ellipse est confondu avec  $O$ . Soit  $\mathcal{R}'(C, xyz)$  un référentiel immobile par rapport à  $\mathcal{R}$ , voir figure.

- Donner les équations de l'ellipse dans  $\mathcal{R}$  et dans  $\mathcal{R}'$  en fonction de  $p$  et de  $e$ .
- En utilisant les notations de la figure, montrer que les expressions des paramètres géométriques de l'ellipse sont

$$\begin{aligned}\rho_{min} &= p/(1+e) \\ \rho_{max} &= p/(1-e) \\ a &= p/(1-e^2) \\ b &= p/\sqrt{1-e^2} \\ c &= ep/(1-e^2)\end{aligned}$$



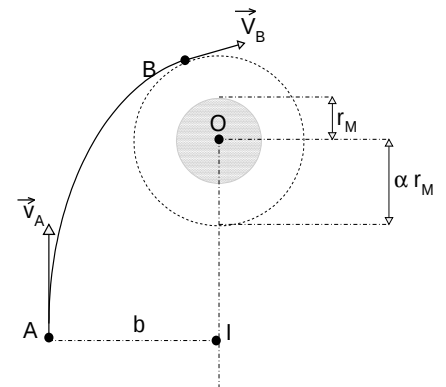
- Calculer les vitesses de  $M$  respectivement à l'apogée,  $A$ , et à la périgée,  $P$  en fonction de  $(p, e, G, M_s)$ .
- En déduire que  $E_m = -\frac{GM_s m}{2a}$ .

Dans la suite de la série, on utilise les résultats des exercices précédents sans les

## Exercice 4 : Mise en orbite d'une sonde spatiale

On souhaite mettre une sonde spatiale  $S$  de masse  $m_S$  en orbite autour de Mars. La vitesse de la sonde au point de lancement  $A$  est  $\vec{V}_A$  et présente un "paramètre d'impact"  $b$ , voir figure ci-contre.

- On suppose qu'au point  $A$  la sonde  $S$  est très éloignée de Mars et que l'on peut ainsi négliger l'énergie gravitationnelle. Calculer l'énergie mécanique de la sonde  $S$  au point  $A$  et déduire la nature de sa trajectoire.
- Calculer la constante des aires  $C$  en fonction de  $V_A$  et  $b$ .
- Sachant que la trajectoire d'approche est tangente au cercle de rayon  $\alpha r_M$  en  $B$ , calculer le module de la vitesse en  $B$ ,  $V_B$ , en fonction de  $V_A$ ,  $r_M$ ,  $\alpha$  et  $b$ .



- Exprimer le paramètre d'impact  $b$  en fonction de  $r_M$ ,  $V_A$ , la masse de Mars  $M_M$  et  $\alpha$ . En déduire la valeur du paramètre d'impact  $b_0$  pour que la sonde se pose sur la surface de Mars.
- Déterminer le module de la vitesse  $V_{orb}$  d'un objet sur l'orbite circulaire de rayon  $\alpha r_M$ .
- On veut que la sonde passe sur l'orbite circulaire de rayon  $\alpha r_M$ . Calculer la variation de vitesse à communiquer à la sonde au point  $B$ .



Module de physique – Mécanique du Point Matériel  
 Corrigé de la série N° 4  
 Filières SMA/SMC/SMP

## Corrigé de l'exercice 1

Le point  $M$  est soumis à l'interaction gravitationnelle.

1. La seule force à laquelle  $M$  est soumise est une force centrale, alors son moment par rapport à  $O$  est nul étant donné que  $\overrightarrow{OM}$  est colinéaire à  $\vec{F}$ . Le théorème du moment cinétique permet d'écrire

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\sigma}_0(M/\mathcal{R})}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} &= \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{0} \\ \implies \vec{\sigma}_0(M/\mathcal{R}) &= \text{Const.} \end{aligned}$$

Comme le moment cinétique est constamment perpendiculaire à  $\overrightarrow{OM}$ , cela implique que le mouvement de  $M$  se déroule dans le plan perpendiculaire au moment cinétique.

2. Calculons la vitesse  $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ , sachant que  $\overrightarrow{OM} = \rho \vec{e}_\rho$

$$\begin{aligned} \vec{V}(M/\mathcal{R}) &= \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} \\ &= \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi. \end{aligned}$$

Ce qui donne pour l'énergie cinétique  $E_c = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2)$ . L'énergie potentielle associée à l'interaction gravitationnelle est

$$\begin{aligned} dE_p &= -\vec{F} \cdot d\vec{l} = \frac{GM_s m}{\rho^2} \vec{e}_\rho \cdot (d\rho \vec{e}_\rho + \rho d\vec{e}_\rho) \\ &= \frac{GM_s m}{\rho^2} d\rho \implies E_p = -\frac{GM_s m}{\rho} + \text{Constante} \end{aligned}$$

et en prenant l'énergie potentielle de référence à l'infini nulle cela implique que la constante est nulle. Aussi, l'énergie mécanique est égale à

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) - \frac{GM_s m}{\rho}$$

Comme  $|\vec{\sigma}_O(M/\mathcal{R})| = |\vec{OM} \wedge m\vec{V}(M/\mathcal{R})| = m\rho^2\dot{\varphi}$ , cela donne

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m\frac{\rho^4\dot{\varphi}^2}{\rho^2} - \frac{GM_s m}{\rho} \\ &= \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}\frac{\sigma_O^2(M/\mathcal{R})}{m\rho^2} - \frac{GM_s m}{\rho} \\ &= \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}\frac{mC^2}{\rho^2} + \frac{K}{\rho} \end{aligned}$$

avec  $C = \rho^2\dot{\varphi}$  et  $K = -GM_s m$ .

3. On pose  $\rho = \frac{1}{u}$ , ce qui implique

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{d\rho}{du} \frac{du}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} \\ &= -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\varphi} \dot{\varphi} = -\rho^2 \dot{\varphi} \frac{du}{d\varphi} = -C \frac{du}{d\varphi} \end{aligned}$$

ce qui donne pour l'énergie mécanique

$$E_m = \frac{1}{2}mC^2 \left( \frac{du}{d\varphi} \right)^2 + \frac{mC^2}{2}u^2 + Ku.$$

4. Comme l'énergie mécanique ne dépend pas explicitement du temps, elle est conservée. Alors

$$\begin{aligned} \frac{dE_m}{dt} &= mC^2 \frac{du}{d\varphi} \frac{d^2u}{d\varphi^2} \dot{\varphi} + mC^2 u \frac{du}{d\varphi} \dot{\varphi} + K \frac{du}{d\varphi} \dot{\varphi} \\ &= \dot{\varphi} mC^2 \frac{du}{d\varphi} \left[ \frac{d^2u}{d\varphi^2} + u + \frac{K}{mC^2} \right] \\ &= 0 \\ \dot{\varphi} \neq 0 \quad \text{et} \quad \frac{du}{d\varphi} \neq 0 &\implies \frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{K}{mC^2} = \frac{GM_s}{C^2} \end{aligned}$$

qui est une équation différentielle de second ordre à coefficients constants avec second membre. La solution générale  $u(\varphi)$  est la somme de la solution sans second membre,  $u_{ssm}$ , et d'une solution particulière  $u_p$ . Calculons la solutions sans second membre,

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = 0$$

dont l'équation caractéristique est  $r^2 + 1 = 0 \implies r_{1,2} = \pm i$  et donc la solution est

$$u_{ssm} = A_1 e^{-i\varphi} + A_2 e^{i\varphi} = A \cos(\varphi - \varphi_0).$$

On vérifie bien que  $u_p = +\frac{GM_s}{C^2}$  est une solution particulière. Ainsi la solution générale est

$$u(\varphi) = u_{ssm} + u_p = A \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{GM_s}{C^2}.$$

où  $A$  et  $\varphi_0$  sont définis à partir des conditions initiales. Comme  $\rho = 1/u$ , nous obtenons

$$\rho = \frac{\frac{C^2}{GM_s}}{1 + \frac{AC^2}{GM_s} \cos(\varphi - \varphi_0)} = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

ce qui donne  $p = \frac{C^2}{GM_s}$  et  $e = \frac{AC^2}{GM_s}$ . La trajectoire est une conique de paramètre  $p$  et d'excentricité  $e$ .

5. L'expression de l'énergie mécanique devient en utilisant  $\frac{du}{d\varphi} = -e \sin(\varphi - \varphi_0)/p$

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{mC^2}{2} \left( \frac{e^2 \sin^2(\varphi - \varphi_0)}{p^2} \right) + \frac{mC^2}{2} \left( \frac{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}{p} \right)^2 - \\ &\quad - GM_s m \left( \frac{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}{p} \right) \\ &= \frac{mC^2}{2p^2} \left( e^2 \sin^2(\varphi - \varphi_0) + 1 + 2e \cos(\varphi - \varphi_0) + e^2 \cos^2(\varphi - \varphi_0) \right) - \\ &\quad - GM_s m \left( \frac{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}{p} \right) \\ &= \frac{GM_s m}{2p} (e^2 + 1 + 2e \cos(\varphi - \varphi_0) - 2 - 2e \cos(\varphi - \varphi_0)) \\ &= \frac{GM_s m}{2p} (e^2 - 1) \end{aligned}$$

Nous avons vu que la nature de la trajectoire est une conique dont l'excentricité est  $e$  :

- Si  $e=0 \implies$  un cercle et  $E_m < 0$ , un état lié,  $\rho$  est constant.
- Si  $0 < e < 1 \implies$  une ellipse et  $E_m < 0$ , un état lié,  $\rho \in [\rho_{min}, \rho_{max}]$
- Si  $e=1 \implies$  une parabole  $E_m = 0$ , un état libre,  $\rho \in [\rho_{min}, +\infty[$ .
- Si  $e > 1 \implies$  une hyperbole et  $E_m > 0$ , c'est un état libre,  $\rho \in [\rho_{min}, +\infty[$ .

6. L'énergie mécanique est conservée, alors

$$\begin{aligned} E_m &= E_m(t=0) = E_c(t=0) + E_p(t=0) \\ &= \frac{1}{2} m V_0^2 - \frac{GM_s m}{\rho_0} \\ &= \frac{GM_s m}{2p} (e^2 - 1) \implies e = \sqrt{1 + \frac{p V_0^2}{GM_s} - \frac{2p}{\rho_0}} \end{aligned}$$

## Corrigé de l'exercice 2

On reprend les résultats de l'exercice précédent sans les redémontrer.

1. La condition pour que la trajectoire soit un cercle est  $e = 0$ , ce qui implique que  $E_m < 0$ .  
 $\rho$  est constant. Soit  $\rho = R$  le rayon de la trajectoire.
2. La trajectoire est circulaire ce qui implique que la composante tangentielle de l'accélération est nulle,  $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = \vec{\gamma}_n(M/\mathcal{R})$ . Comme la force à laquelle le point matériel  $M$  est soumis est centrale, alors elle est colinéaire avec l'accélération, ce qui donne pour le PFD

$$|\vec{F}| = m|\vec{\gamma}_n(M/\mathcal{R})| \Rightarrow \frac{GM_s}{R^2} = m \frac{V^2(M/\mathcal{R})}{R} \Rightarrow |\vec{V}(M/\mathcal{R})| = \sqrt{\frac{GM_s}{R}}$$

3. La période de révolution  $T$  du point matériel  $M$  peut être obtenue par

$$T = \frac{2\pi R}{|\vec{V}(M/\mathcal{R})|} \Rightarrow T^2 = 4\pi^2 R^2 \frac{R}{GM_s} = \frac{4\pi^2 R^3}{GM_s}$$

Ce dernier résultat où le carré de la période de révolution est proportionnel au cube du rayon de la trajectoire vérifie bien la troisième loi de Kepler.

4. Calculons l'énergie mécanique  $E_m$

$$\begin{aligned} E_m &= E_c + E_p \\ &= \frac{1}{2}mV^2(M/\mathcal{R}) - \frac{GM_s m}{R}. \end{aligned}$$

Si l'on remplace le module de la vitesse par son expression, on obtient

$$E_m = \frac{GM_s m}{2R} - \frac{GM_s m}{R} = -\frac{GM_s m}{2R} = E_p/2$$

alors que si l'on substitue  $GM_s/R$  par  $V^2(M/\mathcal{R})$ , on obtient

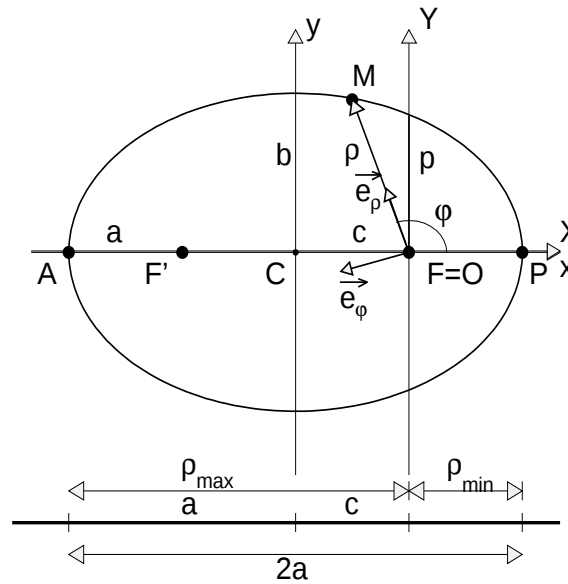
$$E_m = \frac{1}{2}mV^2(M/\mathcal{R}) - mV^2(M/\mathcal{R}) = -\frac{1}{2}mV^2(M/\mathcal{R}) = -E_c$$

on en déduit que  $E_m = -E_c = E_p/2$ .

## Corrigé de l'exercice 3

On utilise les résultats de l'exercice 1 sans les redémontrer.

Les notations qui seront utilisées dans le reste de l'exercice sont celles de la figure ci-après



1. La condition pour que la trajectoire soit une ellipse est que l'excentricité vérifie  $0 < e < 1$ , ce qui donne aussi  $E_m < 0$ .  
Cette condition étant satisfaite dans la suite de l'exercice.
2. Calculons l'équation de la trajectoire dans le référentiel  $\mathcal{R}(F, xyz)$ , sachant que

$$\begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2 \\ \rho = p - e p \cos \theta = p - ex \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \rho^2 = (p - ex)^2 &\Rightarrow x^2 + y^2 = p^2 - 2epx + e^2x^2 \\ &\Rightarrow x^2(1 - e^2) + 2epx + y^2 = p^2 \\ &\Rightarrow x^2 + 2\frac{ep}{1-e^2}x + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{p^2}{1-e^2} \\ &\Rightarrow \left(x + \frac{ep}{1-e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{p^2}{1-e^2} + \frac{e^2p^2}{(1-e^2)^2} \\ &\Rightarrow \left(x + \frac{ep}{1-e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{p^2}{(1-e^2)^2} \end{aligned}$$

L'équation dans le référentiel  $\mathcal{R}'(C, XYZ)$  s'obtient en procédant au changement de variable

$$\begin{cases} X = x + \frac{ep}{1-e^2} \quad (e \neq 1) \\ Y = y. \end{cases}$$

L'équation prend la forme suivante en divisant par  $p^2/(1-e^2)^2$ ,

$$\frac{X^2}{\frac{p^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{Y^2}{\frac{p^2}{1-e^2}} = 1.$$

3. Calcul des paramètres géométriques de l'ellipse :

(a)  $\underline{\rho_{min}}$  :

$$\rho_{min} = \rho(\varphi = 0) \Rightarrow \rho_{min} = \frac{p}{1 + e \cos(0)} = \frac{p}{1 + e}$$

(b)  $\underline{\rho_{max}}$  :

$$\rho_{max} = \rho(\varphi = \pi) \Rightarrow \rho_{max} = \frac{p}{1 + e \cos(\pi)} = \frac{p}{1 - e}$$

(c)  $\underline{a}$  et  $\underline{b}$  : on utilise l'équation de la conique dans le référentiel  $\mathcal{R}'(C, XYZ)$  ce qui permet d'écrire

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = \frac{X^2}{\frac{p^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{Y^2}{\frac{p^2}{1-e^2}} = 1 \Rightarrow a = \frac{p}{1 - e^2} \quad \text{et} \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}.$$

(d)  $\underline{c}$  : la distance du foyer de l'ellipse  $F$  au centre  $C$  est donnée par

$$c = a - \rho_{min} = a - \frac{p}{1 + e} = a - a \frac{1 - e^2}{1 + e} = a - a(1 - e) \Rightarrow c = ea = \frac{ep}{1 - e^2}.$$

4. Calculons les vitesses  $V_A$  et  $V_P$  respectivement du point  $M$  à l'apogée et à la périégée. En effet, l'apogée et la périégée constituent les sommets de l'ellipse et donc la vitesse est orthoradiale en ces points,  $\vec{V}(M/\mathcal{R}) \perp \overrightarrow{OM}$ . Ainsi le moment cinétique de  $M$  en  $A$  est  $|\vec{\sigma}_O(M=A)| = m\rho_{max}V_A = \frac{mp}{1-e}V_A$  et celui de  $M$  en  $P$  est  $|\vec{\sigma}_O(M=P)| = m\rho_{min}V_P = \frac{mp}{1+e}V_P$ . Or le moment cinétique est conservé et on a  $|\vec{\sigma}_O| = mC = m\sqrt{pGM_s}$ , ce qui donne

$$V_A = \frac{C(1 - e)}{p} = (1 - e)\sqrt{\frac{GM_s}{p}}$$

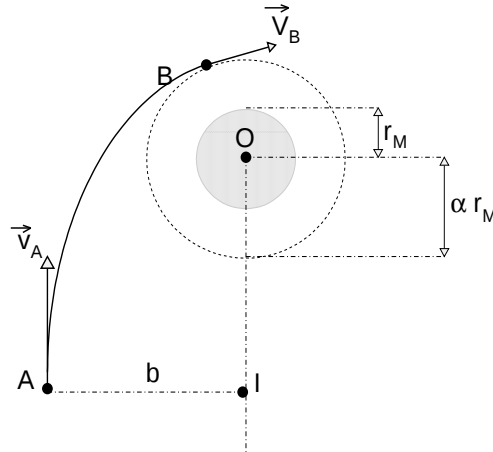
$$V_P = \frac{C(1 + e)}{p} = (1 + e)\sqrt{\frac{GM_s}{p}}$$

5. Comme l'énergie mécanique est conservée, elle a la même valeur quelque soit la position de  $M$  sur l'ellipse. Calculons sa valeur au point  $P$  :

$$\begin{aligned} E_m &= E_c(M=P) + E_p(M=P) \\ &= \frac{1}{2}mV_P^2 - \frac{GM_sm}{\rho_{min}} \\ &= \frac{1}{2}\frac{GM_sm}{p}(1 + e)^2 - \frac{GM_sm}{p}(1 + e) \\ &= \frac{1}{2}\frac{GM_sm}{p}(1 + e^2 + 2e - 2 - 2e) \\ &= -\frac{1}{2}GM_sm\frac{1 - e^2}{p} = -\frac{GM_sm}{2a} \end{aligned}$$

## Corrigé de l'exercice 4

On se propose d'étudier la mise en orbite autour de Mars d'une sonde  $S$  de masse  $m_S$ . La sonde est soumise à l'effet de l'attraction gravitationnelle de Mars. Le référentiel lié à Mars peut être considéré comme un référentiel galiléen. La vitesse de la sonde au point de lancement  $A$  est  $\vec{V}_A$  et présente un "paramètre d'impact"  $b$ , voir figure ci-après.



Les résultats des exercices précédents peuvent être utilisés sans démonstration.

1. L'effet de l'attraction gravitationnelle de Mars sur la sonde en  $A$  est négligeable alors l'énergie potentielle en ce point peut être considérée nulle. L'énergie mécanique est alors  $E_m = \frac{1}{2}m_S V_A^2$ . Comme l'énergie mécanique de la sonde est positive ce qui implique que  $e > 1$ , alors la trajectoire est une branche d'hyperbole dont le sommet est le point pour lequel la vitesse est orthoradiale ( $B$ ) et le foyer est  $O$ .
2. La constante des aires  $C$  est calculée à partir du moment cinétique de  $S$  par rapport à  $O$  en  $A$  :

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_O &= \vec{OA} \wedge m_S \vec{V}_A \\ &= (\vec{OI} + \vec{IA}) \wedge m_S \vec{V}_A \\ &= \vec{OI} \wedge m_S \vec{V}_A \Rightarrow |\vec{\sigma}_O| = m_S b V_A \Rightarrow C = \frac{|\vec{\sigma}_O|}{m_S} = b V_A.\end{aligned}$$

3. Le moment cinétique est conservé car la force est centrale. Ainsi le moment cinétique de la sonde  $S$  en  $B$ , sachant que  $\vec{V}_B \perp \vec{OB}$ , puisque la trajectoire de la sonde en  $B$  est tangente au cercle,

$$|\vec{\sigma}_O| = m_S \alpha r_M V_B = m_S C = m_S b V_A \Rightarrow V_B = \frac{b V_A}{\alpha r_M}.$$

4. L'énergie mécanique en  $B$  est égale à

$$E_m(B) = \frac{1}{2}m_S V_B^2 - \frac{GM_M m_S}{\alpha r_M} = E_m(A) = \frac{1}{2}m_S V_A^2$$

$$\Rightarrow V_B = \sqrt{V_A^2 + \frac{2GM_M}{\alpha r_M}}$$

$$\text{or } b = \frac{\alpha r_M}{V_A} V_B = \alpha r_M \sqrt{1 + \frac{2GM_M}{\alpha r_M V_A^2}}$$

Pour que la sonde atterrisse sur la surface de Mars, la valeur  $b_o$  du paramètre d'impact est celle qui correspond à  $\alpha = 1$ , ce qui donne

$$b_o = r_M \sqrt{1 + \frac{2GM_M}{r_M V_A^2}}.$$

5. On utilise le résultat de l'exercice 2 :

$$V_{orb} = \sqrt{\frac{GM_M}{\alpha r_M}}.$$

6. Pour faire passer la sonde sur l'orbite circulaire de rayon  $\alpha r_M$ , la variation de vitesse à communiquer à la sonde est

$$\Delta V = V_{orb} - V_B = \sqrt{\frac{GM_M}{\alpha r_M}} - \frac{b V_A}{\alpha r_M}.$$



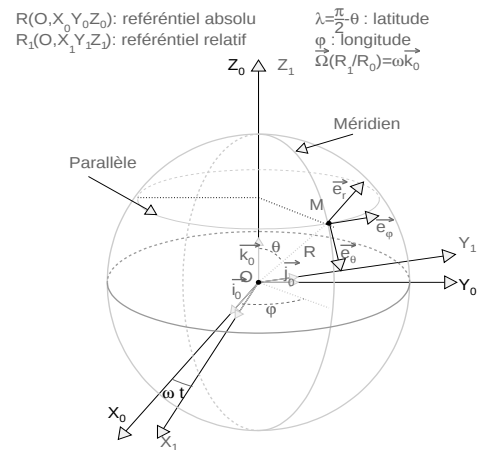
Module de physique - Mécanique du Point Matériel  
Exercices supplémentaires  
PFD et Théorèmes généraux  
Filières SMA/SMC/SMP

**FORCE GRAVITATIONNELLE ET EFFETS DE LA ROTATION DE LA TERRE**

Dans cette série d'exercices, le référentiel absolu est le référentiel géocentrique  $\mathcal{R}_0(O, X_0 Y_0 Z_0)$ , considéré comme galiléen, et le référentiel relatif est le référentiel terrestre lié à la terre  $\mathcal{R}_1(O, X_1 Y_1 Z_1)$  en rotation uniforme par rapport à  $\mathcal{R}_0$  avec le vecteur rotation  $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) = \omega \vec{k}_0$ .

Un point matériel  $M$  sur la surface de la terre est repéré par sa latitude  $\lambda = \pi/2 - \theta$ ,  $\theta$  étant sa coordonnée sphérique, et sa longitude  $\varphi$ , qui coïncide avec l'angle azimuthal. On suppose que la forme de la terre est sphérique et qu'elle est homogène (masse volumique constante). On note par  $\mathcal{R}_2$  le référentiel lié à  $M$  tel que son origine coïncide avec  $M$ . Voir figure ci-contre.

On donne  $K_G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2 \text{Kg}^{-2}$  : la constante gravitationnelle,  $R_T = 6.4 \cdot 10^3 \text{km}$  : le rayon moyen de la terre et  $M_T = 6.0 \cdot 10^{24} \text{Kg}$ ,  $\omega = 7.27 \cdot 10^{-5} \text{rd/s}$ ,  $g_0 = K_G M_T / R_T^2$ .



**QUESTIONS DE POIDS ...**

**EXERCICE 1 :**

Considérons un point matériel, au repos par rapport à la surface terrestre, de masse  $m$  suspendu à une altitude  $h$  à la latitude  $\lambda$  et à la longitude  $\varphi$ .

1. Rappeler l'expression de la force d'attraction gravitationnelle  $\vec{F}_g$  que la terre exerce sur  $m$  en fonction de  $g_0$ ,  $m$ ,  $R_T$  et  $h$ .  
Dans la suite, on néglige  $h$  devant  $R_T$ .
2. Calculer les forces d'inerties associées au mouvement relatif de  $\mathcal{R}_1$  par rapport à  $\mathcal{R}$ .
3. Appliquer le PFD à  $m$  dans  $\mathcal{R}_1$  et montrer que l'on peut le mettre sous la forme  $\vec{T} + m\vec{g} = \vec{0}$  en précisant  $g = f(g_0, R_T, \lambda, \omega)$ .

**Application numérique :** Calculer la déviation  $(g - g_0)/g_0$  à Casablanca : latitude  $\lambda = 33^\circ 34'$  et longitude  $\varphi = 7^\circ 36'$ . Conclure.

**EXERCICE 2**

Un bateau se déplace vers le sud selon le méridien de longitude  $\varphi$  avec une vitesse constante  $v_0$

par rapport au référentiel terrestre. Le bateau est considéré comme un point matériel de masse  $m$ .

1. Calculer les forces d'inerties d'entraînement et de Coriolis,  $\vec{f}_{ie}$  et  $\vec{f}_{ic}$ . Quelle est l'effet de chacune d'elles sur le mouvement du bateau?

Le bateau se déplace cette fois-ci le long de la parallèle à la latitude  $\lambda$ , toujours avec une vitesse constante  $v_0$ .

2. Calculer la force de Coriolis  $\vec{f}_{ic}$ . Quelle est son effet sur le bateau?

### EXERCICE 3 :

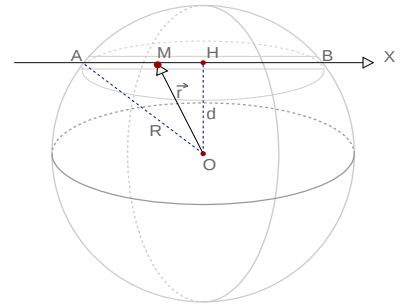
Considérons un point matériel situé à l'intérieur de la terre à une distance  $r$  de son centre.

1. Montrer que l'attraction gravitationnelle peut se mettre sous la forme

$$\vec{F} = -mg_0 \frac{r}{R_T} \vec{e}_r.$$

En déduire l'énergie potentielle  $E_p$  dont dérive  $\vec{F}$ . On prend  $E_p(r=0) = 0$ .

Soit un tunnel rectiligne  $AB$  ne traversant pas  $O$  et muni de l'axe  $HX$ , voir figure ci-contre. On note  $OH = d$ . Un véhicule assimilé à un point matériel de masse  $m$  glisse sans frottement dans le tunnel. Il part du point  $A$  de la surface terrestre sans vitesse initiale. On repère la position du véhicule dans le tunnel par  $\vec{OM} = \vec{OH} + \vec{HM} = d \vec{k}_0 + \vec{x}$ .



2. Calculer la vitesse du véhicule. En déduire son énergie cinétique.
3. Calculer l'énergie mécanique  $E_m$  et montrer qu'elle est constante. Quelle est sa valeur?
4. Calculer la vitesse maximale du véhicule?
5. En utilisant le théorème de l'énergie mécanique, établir l'équation différentielle. Résoudre l'équation et montrer que l'équation horaire est donnée par

$$x(t) = -\sqrt{R_T^2 - d^2} \cos \sqrt{\left( \omega^2 + \frac{g_0}{R_T} \right)} t.$$

## FORCES ÉLECTROSTATIQUE ET MAGNÉTIQUE

### EXERCICE 4 :

Une particule  $\alpha^1$  de charge  $q_1 = +2e$  et de masse  $m_\alpha$  est lancée sur la direction d'un noyau de charge électrique  $q_2 = +Ze$ , où  $e$  est la valeur absolue de la charge électrique d'un électron. A l'instant  $t = 0$ , la vitesse de  $\alpha$  est  $\vec{v} = v_0 \vec{i}$  par rapport à un repère  $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , supposé galiléen. On néglige le poids de la particule  $\alpha$  devant la force de Coulomb exercée par le noyau supposé fixe et situé en  $O$ .

1. Rappeler l'expression de la force de Coulomb et calculer l'énergie potentielle  $E_p$  dont elle dérive.
2. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, calculer la distance minimale<sup>2</sup>  $d_{min}$  à laquelle la particule  $\alpha$  s'approche du noyau.

### EXERCICE 5 :

Une particule de charge  $q$  et de masse  $m$  est soumise à l'action d'un champ magnétique constant  $\vec{B}$ . Soit  $\mathcal{R}(O, XYZ)$  un référentiel galiléen muni de la base orthonormée directe  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  telle que  $\vec{B} = B\vec{k}$ . La vitesse initiale de la particule est  $\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel$ , telles que  $\vec{v}_\perp = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$ , la projection de la vitesse sur le plan  $(OXY)$ , et  $\vec{v}_\parallel = v_z \vec{k}$ , la composante de la vitesse parallèle au champ magnétique. On note  $\omega_c = \frac{qB}{m}$ .

On néglige l'action du poids devant l'action du champ magnétique.

1. Donner l'expression de la force  $\vec{F}_B$  à laquelle la particule est soumise par l'action du champ magnétique.
2. Calculer le travail élémentaire  $\delta W(\vec{F}_B)$ . En déduire que l'énergie cinétique de la particule est constante au cours du temps.
3. Appliquer le PFD et montrer que  $\vec{v}_\parallel$  est une constante du mouvement. En déduire que  $v_\perp$  est aussi une constante du mouvement.
4. Projeter le PFD dans la base cartésienne et déduire les équations différentielles en  $v_x$ ,  $v_y$  et  $v_z$ .
5. Résoudre les équations précédentes et montrer que les équations horaires du mouvement sont

$$\begin{cases} x &= \frac{v_{0\perp}}{\omega_c} \sin \omega_c t \\ y &= \frac{v_{0\perp}}{\omega_c} (\cos \omega_c t - 1) \\ z &= v_{0\parallel} t \end{cases}$$

avec  $x(0) = y(0) = z(0) = 0$  et  $\vec{v}_0 = \vec{v}_{0\perp} + \vec{v}_{0\parallel}$  avec  $\vec{v}_{0\perp} = v_{0\perp} \vec{j}$ . Quelle la nature de la trajectoire ?

---

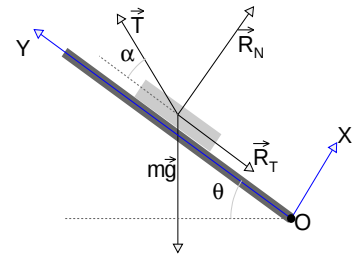
1. Les particules  $\alpha$  sont constituées par le noyau de l'hélium  ${}^4_2\text{He}$   
2. La distance qui sépare  $\alpha$  du noyau est minimale lorsque la vitesse de la particule  $\alpha$  s'annule.

## FORCES DE FROTTEMENT

### EXERCICE 6 :

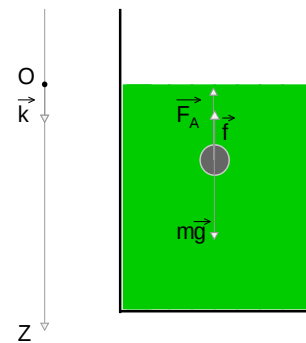
Un homme tire une caisse de bas en haut d'une pente d'angle  $\theta$ . Il exerce une force de traction  $\vec{T}$  de module constant et faisant un angle  $\alpha$  avec le sol. Voir figure ci-contre.

1. Calculer le travail de  $\vec{T}$  sur le trajet.
2. Sachant que l'homme se déplace à une vitesse constante  $v$ , déterminer la réaction normale du sol sur la caisse  $\vec{R}_N$  en fonction de  $m, g, \theta, T, \alpha, R$  et  $v$ .
3. En utilisant la loi de Coulomb,  $|\vec{R}_T| = f|\vec{R}_N|$ ,  $f$  étant une constante, déterminer le travail de la force de frottement.



### EXERCICE 7 :

Une bille sphérique de rayon  $a$  et de masse volumique  $\rho_B$  tombe dans un tube vertical contenant un liquide de masse volumique  $\rho_L$ . En raison de la viscosité du liquide, la bille est freinée par l'action d'une force de frottement visqueux dont l'expression est donnée par la loi  $\vec{f} = -6a\pi\eta\vec{v}$ , dite loi de Stokes.  $\eta$  est appelée la viscosité du liquide. On note par  $\vec{F}_A$  la force due à l'action de la poussée d'Archimède sur la bille.



1. Préciser les forces appliquées sur la bille.
2. Etablir l'équation différentielle du mouvement<sup>3</sup> et montrer que le module de la vitesse varie selon l'équation différentielle suivante

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \kappa \quad \text{en explicitant } \tau \text{ et } \kappa \text{ en fonction de } \rho_B, \rho_L, a, \eta \text{ et } g.$$

Identifier les unités de  $\eta$ , de  $\tau$  et de  $\kappa$  ?

3. Résoudre l'équation, sachant que la vitesse initiale et la position initiale sont nulles, en distinguant les régimes par lesquels la vitesse passe.<sup>4</sup>
4. Calculer la vitesse limite  $v_l$ .

**Application numérique :** Cas d'un grain de poussière d'un diamètre d'environ  $10^{-2}$  mm et de masse volumique  $\rho_B = 2 \text{ gcm}^{-3}$  tombant dans l'air dont la viscosité est  $\eta = 1.8 \cdot 10^{-5} \text{ S.I.}$

3. Indications : Définir un repère approprié, calculer la vitesse et l'accélération ensuite exprimer les forces dans ce repère

4. On distingue deux régimes de la vitesse :

- le régime transitoire est le régime pendant lequel la vitesse varie avec le temps ;
- le régime permanent est le régime pendant lequel la vitesse est constante.

La vitesse du régime permanent est appelée la vitesse limite  $v_l = \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t)$ .

### EXERCICE 8 :

Un cycliste se déplace sur une ligne droite et fournit une puissance mécanique constante  $P$ . Les forces de frottement de l'air sont proportionnelles au carré de la vitesse du cycliste  $\vec{F}_f = -kv\vec{v}$ ,  $k$  étant une constante positive. On néglige les forces de frottement du sol sur la roue. Le système formé par le cycliste et le vélo est considéré comme un point matériel. On choisit un axe horizontal  $Ox$  et le repère terrestre est supposé galiléen.

1. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique dans sa forme différentielle, établir l'équation différentielle que vérifie le module de la vitesse  $v$  et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme

$$mv^2 \frac{dv}{dx} = P - kv^3.$$

2. En posant  $f(x) = P - kv^3$ , déduire l'équation différentielle vérifiée par  $f(x)$ . Intégrer l'équation et déduire l'expression du module de la vitesse  $v$  en fonction de  $x$ , si le module de la vitesse initiale du cycliste est  $v_0$ .

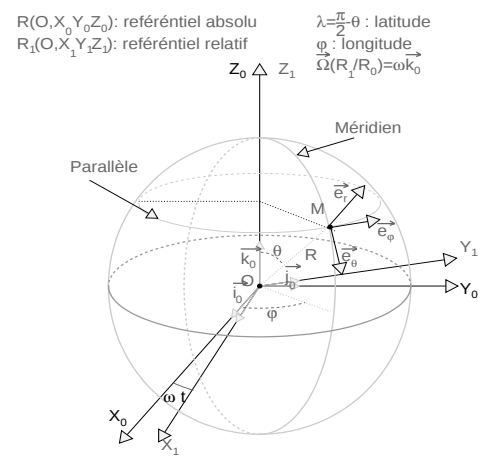
Module de physique - Mécanique du Point Matériel  
Corrigé des exercices supplémentaires  
PFD et Théorèmes généraux  
Filières SMA/SMC/SMP

## Forces gravitationnelle et effets de la rotation de la terre

Dans cette série d'exercices, le référentiel absolu est le référentiel géocentrique  $\mathcal{R}_0(O, X_0 Y_0 Z_0)$ , considéré comme galiléen, et le référentiel relatif est le référentiel terrestre lié à la terre  $\mathcal{R}_1(O, X_1 Y_1 Z_1)$  en rotation uniforme par rapport à  $\mathcal{R}_0$  avec le vecteur rotation  $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) = \vec{\Omega} = \omega \vec{k}_0$ .

Un point matériel  $M$  sur la surface de la terre, en utilisant l'approximation de la sphéricité de la terre, est repéré par sa latitude  $\lambda = \pi/2 - \theta$ ,  $\theta$  étant sa coordonnée sphérique, et sa longitude  $\varphi$ , qui coïncide avec l'angle azimuthal. On note par  $\mathcal{R}_2$  le référentiel lié à  $M$  et telle que son origine coïncide avec  $M$ . Voir figure ci-contre.

On donne  $K_G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2\text{Kg}^{-2}$  : la constante gravitationnelle,  $R_T = 6.4 \cdot 10^3 \text{km}$  : le rayon moyen de la terre et  $M_T = 6.0 \cdot 10^{24} \text{Kg}$ ,  $\omega = 7.27 \cdot 10^{-5} \text{rd/s}$ ,  $g_0 = K_G M_T / R_T^2 \simeq 9.80 \text{ms}^{-2}$ .



### Questions de poids ...

#### Exercice 1 :

Considérons un point matériel, au repos par rapport à la surface terrestre, de masse  $m$  suspendu à une altitude  $h$  à la latitude  $\lambda$  et à la longitude  $\varphi$ .

1. On note par  $\vec{OM} = r\vec{e}_r = (R_T + h)\vec{e}_r$ . L'expression de l'attraction gravitationnelle est donnée par

$$\begin{aligned}\vec{F}_g &= -K_G \frac{mM_T}{r^2} \vec{e}_r \\ &= -K_G \frac{M_T}{R_T^2} \frac{mR_T^2}{(R_T + h)^2} \vec{e}_r = -g_0 \frac{mR_T^2}{(R_T + h)^2} \vec{e}_r.\end{aligned}$$

Si l'on néglige  $h$  devant  $R_T$ , ce qui est justifié, alors

$$\begin{aligned}\vec{F}_g &= -g_0 \frac{mR_T^2}{(R_T + h)^2} \vec{e}_r \\ &= -g_0 \frac{mR_T^2}{R_T^2(1 + \frac{h}{R_T})^2} \vec{e}_r \rightarrow -mg_0 \vec{e}_r.\end{aligned}$$

2. Calcul de  $\vec{f}_{ie} = -m\vec{\gamma}_e$  :

Calculons l'accélération d'entraînement, sachant que  $h/R_T \rightarrow 0$  et donc le point  $M$  est considéré sur la face du globe terrestre,

$$\vec{\gamma}_e = \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) \wedge \left( \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{OM} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= R_T \omega^2 \sin \theta \vec{k}_0 \wedge \vec{e}_\varphi \\
&= -R_T \omega^2 \sin \theta (\sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\varphi)
\end{aligned}$$

ce qui donne  $\vec{f}_{-ie} = m R_T \omega^2 \sin \theta (\sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\varphi)$ .

Calcul de  $\vec{f}_{ic} = -m \vec{\gamma}_{ic}$  :

Comme le point matériel est au repos dans  $\mathcal{R}_1$ , ce qui implique que  $\vec{V}_r = \vec{0}$  et  $\vec{\gamma}_{ic} = \vec{0}$ . Ainsi  $\vec{f}_{ic} = 0$ .

3.  $\mathcal{R}_1$  est non galiléen, ainsi le PFD dans ce référentiel est

$$\begin{aligned}
m \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_1) &= \vec{F}_g + \vec{T} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic} \\
\Rightarrow \vec{0} &= \vec{T} - m g_0 \vec{e}_r + m R_T \omega^2 \sin \theta (\sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\varphi) \\
\Rightarrow \vec{0} &= \vec{T} - m [(g_0 - R_T \omega^2 \sin^2 \theta) \vec{e}_r - R_T \omega^2 \sin \theta \cos \theta \vec{e}_\varphi]
\end{aligned}$$

On peut déduire de l'expression précédente que

$$\vec{g} = (g_0 - R_T \omega^2 \sin^2 \theta) \vec{e}_r - R_T \omega^2 \sin \theta \cos \theta \vec{e}_\varphi$$

ce qui donne pour  $g$ , sachant que  $R_T \omega^2 \rightarrow 0$  ce qui nous permet de négliger le terme en  $\omega^4$  et obtenir

$$g = \sqrt{(g_0 - R_T \omega^2 \sin^2 \theta)^2 + \frac{1}{4} R_T^2 \omega^4 \sin^2 2\theta} \simeq g_0 - R_T \omega^2 \sin^2 \theta$$

sachant que  $\theta = \pi/2 - \lambda$ , cela donne

$$g \simeq g_0 - R_T \omega^2 \cos^2 \lambda.$$

A.N. :

$$\frac{g - g_0}{g_0} = \frac{R_T \omega^2 \cos^2 \lambda}{g_0} \simeq \frac{6.4 \times 10^{-10} \times (7.27 \times 10^{-5})^2 \times \cos^2(\frac{0.57 \times \pi}{180})}{9.81} \simeq 2.4 \times 10^{-3}$$

qui représente 2.4 pour mille de la valeur de  $g_0$  et donc on peut la négliger.

## Corrigé de l'exercice 2

1. Le bateau est considéré comme un point matériel  $M$ . Le bateau se déplace sur le méridien avec une vitesse  $v_0$ . Le référentiel terrestre  $\mathcal{R}_1$  ne peut être considéré comme référentiel galiléen dans ce cas car les distances parcourues par le bateau ne sont pas négligeables devant  $R_T$ . Calculons alors les forces d'inertie dues à la rotation de la terre :

— Force d'entraînement  $\vec{F}_{ie}$  :

c'est la même que dans l'exercice précédent,

$$\vec{f}_{-ie} = m R_T \omega^2 \sin \theta (\sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\varphi).$$

— Force de Coriolis  $\vec{F}_{ic}$  :

La vitesse du bateau dans  $\mathcal{R}_1$  est non nulle cette fois-ci,  $\vec{V}_r = v_0 \vec{e}_\theta$ , sachant que le bateau se déplace sur le méridien du nord vers le sud et  $\vec{e}_\theta$  est le vecteur unitaire de la direction, voir figure ci-dessus. Alors

$$\begin{aligned}
\vec{\gamma}_{ic} &= 2\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \vec{V}_r \\
&= 2\omega \vec{k} \wedge v_0 \vec{e}_\theta \\
&= 2\omega v_0 (\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta) \wedge \vec{e}_\theta = 2\omega v_0 \cos \theta \vec{e}_\varphi = 2\omega v_0 \sin \lambda \vec{e}_\varphi.
\end{aligned}$$

ce qui donne pour la force d'inertie de Coriolis

$$\vec{F}_{ic} = -2m\omega \sin \lambda \vec{e}_\varphi.$$

Voyons les effets de chacune de ces forces :

— Force d'inertie :

Le force d'inertie est portée par  $+\vec{k} \wedge \vec{e}_\varphi = +\vec{e}_\rho$  et donc centrifuge dans le plan  $\Pi$  perpendiculaire à  $\vec{k}$  et passant par la position du bateau. Ainsi, cette force a tendance à ejecter le bateau sur  $\Pi$  vers l'exterieur (dans le sens de  $\vec{e}_\rho$ ).

— Force de Coriolis :

La force de Coriolis est portée par  $\vec{e}_\varphi$  qui est orienté vers l'est. Aussi, la force de Coriolis a tendance de dévier le bateau vers l'est.

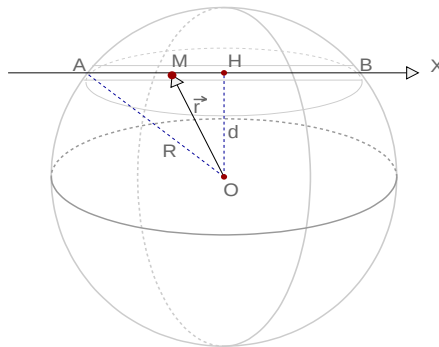
2. Si le bateau se déplace le long de la parallèle à la latitude  $\lambda$  avec une vitesse  $v_0$ . On peut écrire que  $\vec{V}_r = \epsilon v_0 \vec{e}_\varphi$ ,  $\epsilon = +1$  le bateau se déplace vers l'est alors que pour  $\epsilon = -1$  le bateau se déplace vers l'ouest. L'accélération de Coriolis est égale à

$$\begin{aligned}\vec{V}_{ic} &= 2\epsilon\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \vec{V}_r \\ &= 2\epsilon\omega v_0 \vec{k} \wedge \vec{e}_\varphi \\ &= 2\epsilon\omega v_0 (\cos\theta \vec{e}_r + \sin\theta \vec{e}_\theta) \\ &= 2\epsilon\omega v_0 (\sin\lambda \vec{e}_r + \cos\lambda \vec{e}_\theta) .\end{aligned}$$

Rappelons que  $\vec{e}_\rho = \vec{k} \wedge \vec{e}_\varphi$ . Ainsi, si  $\epsilon = +1$ , la force de Coriolis est centrifuge et son effet s'ajoute à celui de la force d'entraînement, c'est à dire elle aura tendance à faire ejecter le bateau, alors que si  $\epsilon = -1$  la force de Coriolis est centripète et son effet s'oppose à celui de la force d'entraînement, c'est à dire tendance à faire couler le bateau.

## Corrigé de l'exercice 3

Considérons un point matériel situé à l'intérieur de la terre à une distance  $r$  de son centre, voir figure ci-dessous.



1. Soit  $M$  la position du point matériel telle que  $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$ . Rappelons que  $M$  va subir l'effet d'attraction de la sphère de rayon  $r$  et donc de masse  $M_r$ , si l'on considère que la masse volumique de la terre est constante  $\rho_T = M_T / (4\pi R_T^3/3)$

$$M_r = \rho_T \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi r^3}{3} \times \frac{M_T}{\frac{4\pi R_T^3}{3}} = M_T \times \frac{r^3}{R_T^3}$$



ce qui donne pour l'attraction gravitationnelle que va subir  $M$  l'expression

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -K_G \frac{mM_r}{r^2} \vec{e}_r \\ &= -K_G \frac{mM_T \frac{r^3}{R_T^3}}{r^2} \vec{e}_r = -K_G m M_T \frac{r}{R_T^3} \vec{e}_r\end{aligned}$$

Comme l'attraction gravitationnelle est conservative, alors

$$\begin{aligned}dE_p &= -\vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= K_G m M_T \frac{r}{R_T^3} \vec{e}_r \cdot (dr \vec{e}_r + r d\vec{e}_r) = K_G m M_T \frac{r dr}{R_T^3} \Rightarrow E_p = K_G m M_T \frac{r^2}{2R_T^3} + K\end{aligned}$$

avec  $K = E_p(r=0) = 0 \Rightarrow E_p = K_G m M_T \frac{r^2}{2R_T^3}$ .

2. La position de  $M$  peut être repérée par  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = d \vec{k}_0 + \vec{x} = d \vec{k}_0 + x \vec{u}$  avec  $\vec{u}$  le vecteur unitaire de la direction  $Ox$ . La vitesse est égale à

$$\begin{aligned}\vec{v}(M/\mathcal{R}) &= \left. \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \\ &= \dot{x} \vec{u} + x \left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \dot{x} \vec{u} + x \left( \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \vec{u} \right) = \dot{x} \vec{u} + x \omega \vec{k} \wedge \vec{u}\end{aligned}$$

ce qui donne pour le module de la vitesse  $V = |\vec{v}(M/\mathcal{R})| = \sqrt{\dot{x}^2 + x^2 \omega^2}$  sachant que  $\vec{u} \perp \vec{k}$ . L'énergie cinétique est égale à  $E_c = \frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + x^2 \omega^2)$ .

3. L'énergie mécanique est donnée par  $E_m = E_c + E_p$

$$\begin{aligned}E_m &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + x^2 \omega^2) + K_G m M_T \frac{r^2}{2R_T^3} \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + x^2 \omega^2) + K_G m M_T \frac{x^2 + d^2}{2R_T^3}\end{aligned}$$

La seule force à laquelle est soumise  $M$  est la force gravitationnelle, qui est conservative, et comme  $E_m$  ne dépend pas explicitement du temps, alors elle est conservée.

La valeur de  $E_m$  est constante et égale à sa valeur à l'instant initial, sachant que  $\dot{x}_0 = 0$  et  $\cos \lambda = x_0/R_T$ , où  $\lambda$  est la latitude du tunnel,

$$\begin{aligned}E_p &= E_p(t=0) = \frac{1}{2} m x_0^2 \omega^2 + K_G m M_T \frac{x_0^2 + d^2}{2R_T^3} \\ &= \frac{1}{2} m R_T^2 \omega^2 \cos^2 \lambda + K_G m M_T \frac{R_T^2 \cos^2 \lambda + d^2}{2R_T^3}\end{aligned}$$

4. La vitesse du véhicule  $M$  est maximale, son énergie cinétique aussi, si l'énergie potentielle du véhicule est minimale, car l'énergie mécanique est conservée.

Rappelons que  $r$  varie entre  $d$  et  $R_T$ ,  $r \in [d, R_T]$ , voir figure. Comme  $E_p$  est une fonction strictement croissante en fonction de  $r$  dans cet intervalle, alors  $E_p$  est minimale pour  $r = d$  et donc

$$r = d \Rightarrow E_p(r=d) = E_p^{\min} \quad \text{et} \quad E_c(r=d) = E_c^{\max} = \frac{1}{2} m V_{\max}^2$$

ce qui donne en utilisant  $E_p = E_p^0 = E_p^{min} + E_c^{max}$ ,

$$\begin{aligned} E_c^{max} &= E_p^0 - E_p^{min} \\ &= \frac{1}{2} m R_T^2 \omega^2 \cos^2 \lambda + K_G m M_T \frac{R_T^2 \cos^2 \lambda + d^2}{2 R_T^3} - K_g m M_T \frac{d^2}{2 R_T^3} \\ \frac{1}{2} m V_{max}^2 &= \frac{1}{2} m R_T^2 \omega^2 \cos^2 \lambda \left( 1 + \frac{K_G M_T}{R_T^3} \right) \\ \Rightarrow V_{max} &= \sqrt{R_T^2 \omega^2 \cos^2 \lambda \left( 1 + \frac{K_G M_T}{R_T^3} \right)} \end{aligned}$$

5. L'énergie cinétique étant conservée, sa dérivée par rapport au temps est nulle

$$\begin{aligned} \frac{dE_m}{dt} &= m (\dot{x}\ddot{x} + \omega^2 x\dot{x}) + x\dot{x} \frac{K_G m M_T}{R_T^3} \\ &= m\dot{x} \left[ \ddot{x} + \left( \omega^2 + \frac{K_G M_T}{R_T^3} \right) x \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \left( \omega^2 + \frac{K_G M_T}{R_T^3} \right) x = 0 \quad \text{sachant que} \quad m\dot{x} \neq 0$$

qui est une équation différentielle de second ordre à coefficients constants. Les racines de l'équation caractéristique sont des nombres complexes imaginaires purs  $\pm i\sqrt{\omega^2 + \frac{K_G M_T}{R_T^3}}$ , or  $g_0 = K_G M_T / R_T^3$  ce qui donne pour solution

$$x(t) = A \cos \left[ \sqrt{\omega^2 + \frac{g_0}{R_T}} t - \alpha_0 \right]$$

A et  $\alpha_0$  sont déterminées à partir des conditions initiales

$$\left. \begin{aligned} x(t=0) = x_0 &= \sqrt{R_T^2 - d^2} = A \cos \alpha_0 \\ \dot{x}(t=0) = 0 &= A \sqrt{\omega^2 + \frac{g_0}{R_T}} \sin \alpha_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha_0 = 0 \quad \text{et} \quad A = x_0 = \sqrt{R_T^2 - d^2}$$

d'où la solution

$$x(t) = \left( \sqrt{R_T^2 - d^2} \right) \cos \left[ \sqrt{\omega^2 + \frac{g_0}{R_T}} t \right].$$

## Corrigé de l'exercice 4

Une particule  $\alpha^1$  de charge  $q_1 = +2e$  et de masse  $m_\alpha$  est lancée sur la direction d'un noyau de charge électrique  $q_2 = +Ze$ , où  $e$  est la valeur absolue de la charge électrique d'un électron. A l'instant  $t = 0$ , la vitesse de  $\alpha$  est  $\vec{v} = v_0 \vec{i}$  par rapport à un repère  $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , supposé galiléen. On néglige le poids de la particule  $\alpha$  devant la force de Coulomb exercée par le noyau supposé fixe et situé en  $O$ .

1. L'expression de la force de Coulomb est donnée par

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{x^2} \vec{i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{x^2} \vec{i}.$$

Soit  $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} \Rightarrow d\vec{l} = dx\vec{i}$ , ce qui donne

$$dE_p = -\vec{F} \cdot d\vec{l} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{x^2} dx \Rightarrow E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{x} + K$$

où  $K$  est une constante. Comme  $E_p(x \rightarrow +\infty) = 0 \Rightarrow K = 0$  et l'énergie potentielle est égale à  $E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{x}$ .

---

1. Les particules  $\alpha$  sont constituées par le noyau de l'hélium  ${}^4_2\text{He}$

2. A l'instant  $t = 0$  la vitesse de la particule est  $\vec{v} = v_0 \vec{i}$  et son énergie cinétique est  $E_c^A = 1/2 m_\alpha v_0^2$ . A  $t = 0$ , la particule  $\alpha$  est si loin du noyau que l'on peut négliger son énergie potentielle  $E_p^A = 0$ .

La particule  $\alpha$  continue de s'approcher du noyau jusqu'à ce que sa vitesse soit nulle, donc son énergie cinétique est nulle  $E_c^B = 0$ , et la distance qui la sépare du noyau est la distance minimale d'approche,  $d_{min}$ , et donc son énergie potentielle est  $E_p^B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{d_{min}}$ .

La seule force à laquelle est soumise la particule  $\alpha$  est la force de Coulomb, qui est conservative. Appliquons le théorème de l'énergie cinétique

$$E_c^B - E_c^A = E_p^B - E_p^A \Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{d_{min}} = \frac{1}{2} m_\alpha v_0^2 \Rightarrow d_{min} = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{m_\alpha v_0^2}$$

## Corrigé de l'exercice 5

Une particule de charge  $q$  et de masse  $m$  est soumise à l'action d'un champ magnétique constant  $\vec{B}$ . Soit  $\mathcal{R}(O, XYZ)$  un référentiel galiléen muni de la base orthonormée directe  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  telle que  $\vec{B} = B\vec{k}$ . La vitesse initiale de la particule est  $\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel$ , telles que  $\vec{v}_\perp = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$ , la projection de la vitesse sur le plan  $(OXY)$ , et  $\vec{v}_\parallel = v_z \vec{k}$ , la composante de la vitesse parallèle au champ magnétique. On note  $\omega_c = \frac{qB}{m}$ .

On néglige l'action du poids devant l'action du champ magnétique.

1. L'expression de la force appliquée par le champ magnétique sur la particule chargée est

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \wedge \vec{B}.$$

2. Calculons le travail élémentaire de  $\vec{F}_B$

$$\begin{aligned} \delta W(\vec{F}_B) &= \vec{F}_B \cdot d\vec{l} \\ &= q (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} \\ &= q (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} dt \\ &= q (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} dt = q (\vec{v} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{B} dt = 0. \end{aligned}$$

On a utilisé la propriété d'invariance du produit mixte dans une permutation circulaire. Comme la seule force appliquée est  $\vec{F}_B$ , alors le théorème de l'énergie cinétique dans sa forme différentielle

$$dE_c = \delta W(\vec{F}_B) = 0 \Rightarrow E_c = \text{Constante}.$$

3. Appliquons le PFD, sachant que l'action du poids est négligeable

$$\begin{aligned} m \frac{d\vec{v}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} &= q\vec{v} \wedge \vec{B} \\ \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} &= -\frac{q}{m} \vec{B} \wedge \vec{v} \end{aligned}$$

sachant que  $v = |\vec{v}| = \text{const} \Rightarrow \dot{v} = 0$ , ainsi on peut écrire, avec  $\vec{\tau} = \vec{v}/v$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = \dot{v} \vec{\tau} - \frac{q}{m} \vec{B} \wedge \vec{v}$$

et on sait que

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = \dot{v} \vec{\tau} + \vec{\Omega} \wedge \vec{v}$$

ce qui nous permet de déduire que le vecteur vitesse  $\vec{v}$  est en rotation dans  $\mathcal{R}$  avec le vecteur rotation  $\vec{\Omega} = \frac{-q}{m}\vec{B}$

$$\left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega} \wedge \vec{v}.$$

Si l'on applique la dernière relation à la composante longitudinale  $\vec{v}_{//}$  de la vitesse sachant que  $\vec{B} \wedge \vec{v}_{//} = \vec{0} \implies \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{//} = \vec{0}$  ainsi

$$\left. \frac{d\vec{v}_{//}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{//} = \vec{0} \implies \vec{v}_{//} = \text{Constante}.$$

Comme  $v^2 = v_{//}^2 + v_{\perp}^2$  est constante,  $v_{//}$  constante implique que  $v_{\perp}$  est constante.

4. Développons le PFD dans la base cartésienne, sachant que  $\vec{B} = B\vec{k}$

$$\begin{aligned} m \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + m \frac{dv_y}{dt} \vec{j} + m \frac{dv_z}{dt} \vec{k} &= q \left( v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \right) \wedge B \vec{k} \\ &= qBv_y \vec{i} - qBv_x \vec{j} \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} - \frac{qB}{m}v_y = 0 \\ \frac{dv_y}{dt} + \frac{qB}{m}v_x = 0 \\ \frac{dv_z}{dt} = 0 \end{cases}$$

On constate que les deux premières équations sont couplées, c'est à dire  $v_x$  et  $v_y$  figurent dans les deux équations. La composante de la vitesse selon  $Oz$  est constante et égale à la composante de la vitesse selon  $Oz$  à l'instant  $t = 0$ ,  $v_z = v_{//}$ .

5. Reprenons les équations précédentes en remplaçant  $v_x = \dot{x}$ ,  $v_y = \dot{y}$  et  $v_z = \dot{z}$  ce qui donne en premier  $z = v_{//}t + K$  avec  $K = z(0) = 0$ . De même

$$\ddot{y} = -\frac{qB}{m}\dot{x} \implies \dot{y} = -\omega_c x + K$$

or  $x(0) = 0$  et  $\dot{y}_0 = 0$  alors  $K = 0$

$$\ddot{x} = \omega_c \dot{y} = -\omega_c^2 x \implies \ddot{x} + \omega_c^2 x = 0$$

qui est une équation de second ordre à coefficients constants sans second membre. La solution est  $x = A \cos(\omega_c t - \varphi_0)$  avec  $x(0) = 0 = A \cos \varphi_0 \implies \varphi_0 = \pi/2$  et  $\dot{x}(0) = v_{0\perp} = -A\omega_c \sin \varphi_0 \implies A = -v_{0\perp}/\omega_c$  et la solution est

$$x(t) = -\frac{v_{0\perp}}{\omega_c} \cos(\omega_c t - \pi/2) = \frac{v_{0\perp}}{\omega_c} \sin \omega_c t.$$

L'équation en  $y$  est alors

$$\dot{y} = -\omega_c x = -v_{0\perp} \sin \omega_c t \implies y = -\frac{v_{0\perp}}{\omega_c} \cos \omega_c t + K$$

or  $y(0) = 0 \implies K = \frac{v_{0\perp}}{\omega_c}$  ce qui donne finalement

$$\begin{cases} x = \frac{v_{0\perp}}{\omega_c} \cos \omega_c t \\ y = \frac{v_{0\perp}}{\omega_c} (1 - \cos \omega_c t) \\ z = v_{//} t. \end{cases}$$

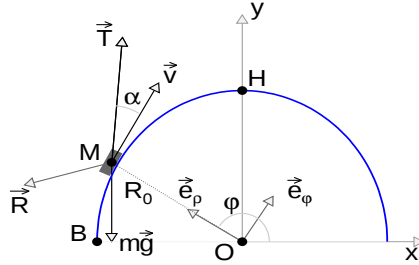
A partir de des expressions précédentes, on a

$$x^2 + \left(y + \frac{v_{0\perp}}{\omega_c}\right)^2 = \frac{v_{0\perp}^2}{\omega_c^2} \quad \text{et} \quad z = v_{//} t$$

qui sont respectivement les équations d'un cercle de centre  $(0, -\frac{v_{0\perp}}{\omega_c})$  et de rayon  $\frac{v_{0\perp}}{\omega_c}$  dans le plan  $(Oxy)$  et d'un mouvement de translation rectiligne uniforme selon  $Oz$ . C'est un mouvement hélicoïdal et la trajectoire est une spirale.

## Corrigé de l'exercice 6

Un homme tire une caisse  $M$  de bas en haut d'une pente d'angle  $\theta$ . Il exerce une force de traction  $\vec{T}$  de module constant et faisant un angle  $\alpha$  avec le sol. Voir figure ci-contre.



On utilise la base polaire  $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$  étant donné que le déplacement de la caisse se fait sur une colline dont la forme est un demi cercle. Comme  $\vec{OM} = R_0 \vec{e}_\rho$ , le déplacement élémentaire est  $d\vec{l} = R_0 d\vec{e}_\rho = R_0 d\varphi \vec{e}_\varphi$ .

1. Calculons le travail de  $\vec{T}$  pour aller du bas de la colline, point  $B(\varphi = \pi)$ , vers le haut de la colline, le point  $H(\varphi = \pi/2)$ .

$$\begin{aligned} \delta W_B^H(\vec{T}) &= \vec{T} \cdot d\vec{l} \\ &= T (\sin\alpha \vec{e}_\rho + \cos\alpha \vec{e}_\varphi) \cdot R_0 d\varphi \vec{e}_\varphi \\ &= R_0 T \cos\alpha \implies W_B^H(\vec{T}) = \int_\pi^{\pi/2} \delta W_B^H(\vec{T}) = -\frac{\pi}{2} R_0 T \cos\alpha \end{aligned}$$

2. Si l'homme se déplace avec une vitesse constante  $v_0$ ,  $\vec{v} = v_0 \vec{e}_\varphi$ , la caisse se déplace aussi avec la même vitesse. Pour Déterminer la réaction  $R_N$ , nous appliquons le PFD.

Calculons l'accélération.  $\vec{OM} = R_0 \vec{e}_\rho \implies \vec{v} = R_0 \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$ . Comme  $v$  est constant alors  $\omega = \dot{\varphi}$  est constante et  $R_0 \omega = v_0 \implies \omega = v_0/R_0$ . L'accélération de  $M$  est  $\vec{a} = -R_0 \dot{\varphi}^2 \vec{e}_\rho = -R_0 \omega^2 \vec{e}_\rho = -\frac{v_0^2}{R_0} \vec{e}_\rho$ . Les forces appliquées à  $M$  sont

$$\begin{aligned} \vec{T} &= T (\sin\alpha \vec{e}_\rho + \cos\alpha \vec{e}_\varphi) \\ \vec{R} &= \vec{R}_N + \vec{R}_T = R_N \vec{e}_\rho - R_T \vec{e}_\varphi \\ \vec{P} &= m\vec{g} = mg \left( -\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \vec{e}_\rho - \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \vec{e}_\varphi \right) = mg (-\sin\varphi \vec{e}_\rho + \cos\varphi \vec{e}_\varphi) \end{aligned}$$

Le PFD s'écrit comme suit

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= \vec{T} + \vec{R} + m\vec{g} \\ -m \frac{v_0^2}{R_0} \vec{e}_\rho &= T (\sin\alpha \vec{e}_\rho + \cos\alpha \vec{e}_\varphi) + R_N \vec{e}_\rho - R_T \vec{e}_\varphi + mg (-\sin\varphi \vec{e}_\rho + \cos\varphi \vec{e}_\varphi) \\ &= (T \sin\alpha + R_N - mg \sin\varphi) \vec{e}_\rho + (T \cos\alpha - R_T + mg \cos\varphi) \vec{e}_\varphi. \end{aligned}$$

La projection selon  $\vec{e}_\rho$  nous permet d'avoir

$$T \sin\alpha + R_N - mg \sin\varphi = -m \frac{v_0^2}{R_0} \implies R_N = m \left( g \sin\varphi - \frac{v_0^2}{R_0} \right) - T \sin\alpha$$

3. Calculons le travail de la force de frottement  $\vec{R}_T = -f |\vec{R}_N| \vec{e}_\varphi$  :

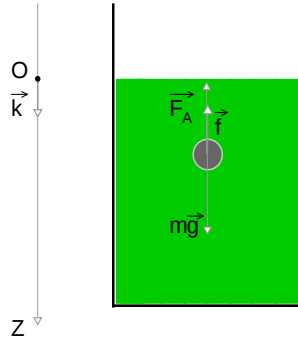
$$\begin{aligned} \delta W_B^H(\vec{R}_T) &= -f |\vec{R}_N| \vec{e}_\varphi \cdot R_0 d\varphi \vec{e}_\varphi \\ &= -f R_0 \left[ m \left( g \sin\varphi - \frac{v_0^2}{R_0} \right) - T \sin\alpha \right] d\varphi \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} W_B^H(\vec{R}_T) &= \int_{\pi}^{\pi/2} \delta W_B^H(\vec{R}_T) \\ &= -fR_0 \left[ m \left( g + \frac{\pi}{2} \frac{v_0^2}{R_0} \right) + T \frac{\pi}{2} \sin \alpha \right] \end{aligned}$$

## Corrigé de l'exercice 7

Une bille sphérique de rayon  $a$  et de masse volumique  $\rho_B$  tombe dans un tube vertical contenant un liquide de masse volumique  $\rho_L$ , voir figure ci-après.



Soit  $V_B = \frac{4\pi a^3}{3}$  le volume de la bille et  $m = \rho_B V_B = \frac{4\pi \rho_B a^3}{3}$  sa masse.

1. Comme indique dans la figure ci-dessus, les forces appliquées sont

$$\begin{cases} \vec{f} = -6a\pi\eta\vec{v} & \text{force de frottement visqueux;} \\ \vec{F}_A = -\rho_L V_B g \vec{k} & \text{poussée d'Archimède;} \\ \vec{P} = +mg\vec{k}. & \text{poids.} \end{cases}$$

2. Pour établir l'équation différentielle, il suffit d'appliquer le PFD en considérant la bille comme un point matériel.. Comme  $\vec{OM} = z\vec{k} \Rightarrow \gamma = \ddot{z}\vec{k}$ , et le PFD donne

$$\begin{aligned} \vec{f} + \vec{F}_A + m\vec{g} &= m\ddot{z}\vec{k} \\ -6a\pi\eta\dot{z}\vec{k} - \rho_L V_B g \vec{k} + mg\vec{k} &= m\ddot{z}\vec{k} \end{aligned}$$

sachant que  $v = \dot{z}$  et en projetant le PFD sur  $\vec{k}$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \ddot{z} + \frac{6a\pi\eta}{m}\dot{z} &= \left(1 - \frac{\rho_L V_B}{m}\right) g \\ \frac{dv}{dt} + \frac{9\eta}{2\rho_B a^2} v &= \left(1 - \frac{\rho_L}{\rho_B}\right) g \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \kappa \text{ avec } \tau^{-1} = \frac{9\eta}{2\rho_B a^2} \text{ et } \kappa = \left(1 - \frac{\rho_L}{\rho_B}\right) g \end{aligned}$$

Sachant que la dimension de  $[\eta] = [kg][m^{-1}][s^{-1}]$ , les dimensions de  $\tau$  et de  $\kappa$  sont respectivement

$$[\tau] = \frac{[\rho_B][a^2]}{[\eta]} = \frac{\frac{[kg]}{[m^3]}[m^2]}{[kg][m^{-1}][s^{-1}]} = [s]$$

et

$$[\kappa] = [g] = [m][s^{-2}]$$

ainsi  $\tau$  est identifié à un temps et  $\kappa$  à une accélération.

### 3. Résolvons l'équation précédente

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \kappa$$

c'est une équation du premier ordre à coefficient constant. La solution totale est la somme de la solution sans second membre  $v_{ssm}$  et d'une solution particulière  $v_p$ . Aussi,

$$\frac{dv_{ssm}}{dt} + \frac{v_{ssm}}{\tau} = 0 \implies v_{ssm} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

et la solution particulière est  $v_p = \kappa\tau$ . Ce qui donne

$$v = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \kappa\tau$$

où  $A$  est déterminée à partir de la vitesse initiale  $v(t=0) = 0 \implies A = -\kappa\tau$ . La solution est alors

$$v(t) = -\kappa\tau(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

On remarque que lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , la vitesse tend vers une valeur limite  $v_l$ . On distingue ainsi deux régimes :

- le régime transitoire où la vitesse varie avec le temps et son expression est celle établie ci-dessus ;
- le régime permanent où la vitesse a atteint une valeur qui ne varie plus avec le temps.

### 4. La vitesse limite $v_l$ , vitesse atteinte en régime permanent, est obtenue comme suit

$$v_l = \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = -\kappa\tau = \frac{2a^2}{9\eta} (\rho_B - \rho_L) g.$$

#### Application numérique

$$a = 0.5 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 0.5 \cdot 10^{-5} \text{ m} \text{ et } \rho_B = 2 \text{ g cm}^{-3} = 2 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$$

$$v_l = \frac{2(0.5 \cdot 10^{-5})^2}{9 \times 1.8 \cdot 10^{-5}} \times 2 \cdot 10^3 \times 9.81 = 0.61 \text{ cm s}^{-1}$$

## corrigé de l'exercice 8

Un cycliste se déplace sur une ligne droite et fournit une puissance mécanique constante  $P$ . Les forces de frottement de l'air sont proportionnelles au carré de la vitesse du cycliste  $\vec{F}_f = -kv\vec{v}$ ,  $k$  étant une constante positive. On néglige les forces de frottement du sol sur la roue. Le système formé par le cycliste et le vélo est considéré comme un point matériel. On choisit un axe horizontal  $Ox$  et le repère terrestre est supposé galiléen.

### 1. Les forces qui sont appliquées au cycliste sont

- le poids, perpendiculaire au déplacement et donc ne travaille pas ;
- la force de frottement visqueux  $\vec{F} = -kv\vec{v}$ .

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique dans sa forme différentielle, exprimée en fonction des puissances :

$$\begin{aligned} \frac{dE_c}{dt} &= P(\vec{F}) + P(\text{mecanique}) \\ \frac{m}{2} \frac{dv^2}{dt} &= -kv\vec{v} \cdot \vec{v} + P \\ mv \frac{dv}{dt} &= P - kv^3 \\ mv \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} &= P - kv^3 \\ mv^2 \frac{dv}{dx} &= P - kv^3 \end{aligned}$$

qui n'est d'autre que l'équation recherchée.

2. En posant  $f(x) = P - kv^3$ , nous avons  $\frac{df(x)}{dx} = -3kv^2 \frac{dv}{dx}$ . Aussi, on a

$$\frac{-m}{3k} \frac{df(x)}{dx} = f(x) \implies \frac{df(x)}{dx} + \frac{3k}{m} f(x) = 0$$

qui est une équation différentielle de premier ordre sans second membre à coefficient constant. La solution est obtenue en séparant les variables

$$\frac{df(x)}{f(x)} = -\frac{3k}{m} dx \implies f(x) = Ae^{-\frac{3k}{m}x}$$

où  $A$  est une constante que l'on détermine des conditions initiales. En remplaçant  $f(x)$  par son expression, on obtient

$$P - kv^3 = Ae^{-\frac{m}{3k}x} \implies v(x) = \left( \frac{P}{k} - \frac{A}{k} e^{-\frac{m}{3k}x} \right)^{1/3}$$

comme  $v(x=0) = v_0$ , alors  $A = P - kv_0^3$  et la solution se met sous la forme

$$v(x) = \left[ \frac{1}{k} \left( P - [P - kv_0^3] e^{-\frac{m}{3k}x} \right) \right]^{1/3}$$